EVCLIDIS
POSTERIORES LIBRI IX.

Accessit LIBER XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRATIONIBVS, accuratisq; scholijs illustrati: nunc quarto editi, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI
e Societate IESV.

IHS

ROMAE,
Apud Aloysium Zannettum. MDCIII.
PERMISSV SVPERIORVM.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorũ. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus disserere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maximè, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque vt oportet, explicandas, harum cognitio linearũ requiratur, idque adeo, vt absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atque vsum, neque exprimi queant, neque intelligi. Nam non raro pleraque laterũ sunt illæ lineæ, quæ a Græcis ἄλογοι, *a Latinis Irrationales ap-*

pellantur: Vel, si non sunt Irrationales, longitudine certe inter se sunt incommensurabiles, atque adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atque intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, vt absque his nullo modo cognoscantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrina suus ordo, ratioque constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesque, quantum ea rei Geometricæ inseruiũt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo a principijs, definit initio vnitatem, docetque eam esse, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum esse dicitur. Nam secundũ vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere solemus. Cæterum vnitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus:

I I.

NVMERVS autem, ex vnitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quædam ex vnitatibus composita, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt vnitates eum constituentes: Ita vt vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. vnitates, quarum qualibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum qualibet centesima ipsius pars est, &c.

EX his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cum eos vna eademque mensura, nimirum vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cum plurima earum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, vt clarissime lib. 10. ostendetur.

PARS

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON est dissimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc solum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cum illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerũ, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomẽ trahit a 7. cũ 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42. et in reliquis eodẽ modo.

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cum eum nõ metiatur, nisi per suas vnitates, pars ipsius dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum quælibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerũ 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidẽ nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autẽ & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CAETERVM partes quæcunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos cõmunis duorum numerorũ mensura vtrumque eorum metitur, & eũ scilicet, qui partes dicitur, & eũ, cuius ille partes appellatur: Ita vt si communis duorum numerorum mẽsura metiatur minorem per 3. & maiorẽ per 5. dicatur minor maioris tres quintæ. Tales

partes sunt 6 huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cum vnitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc loco non solum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verum etiam illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus praestiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, qua maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantum eam, quae maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cum ipsum metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter se res habet. Nõ. n. propositis duabus magnitudinibus inaequalibus, necessario minor aut pars, aut partes est maioris, cũ ea persaepe sint incõmensurabiles, vt aperte liber decimus demõstrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeo vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si vero maiorem minor non metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem

non

non metietur. Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariã diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4.10.40.100.1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes æquales, cum eorum dimidia sint 2.5.20.50.500.

VII.

IMPAR vero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt à pari.

OMNES hi numeri 5.11.15. 37. 101. 1001 impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe quia vnitate differunt ab his paribus 4. 10.14.36.100. 1000, vel etiã ab his 6. 12.16.38.102.1002. Ex hoc autẽ loco perspicue colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2, per imparem numerum 15, Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5, &c.

CAETERVM si rectè duæ proximæ definitiones expendantur, perspicuum erit fieri posse, vt vnus idemq; numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6 per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3, pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nõnulli, existimantes hoc esse absurdũ, vt excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum, ita vt numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propositus numerus par 24. neque pariter par sit, cum eum non tantũ metiatur par 6. per parẽ 4. sed etiã par 8. per imparẽ 3. Neque pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum est, par 8. per imparem 3, verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodãmodo naturam vtriusque, vt cõstat. Itaq; tria constituentur genera numeri paris inter se maximè diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui à quibusdã, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum rectè explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunt, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifestè omnẽ numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat, illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum denique, quem par numerus metitur per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, et pariter imparẽ, demonstratque omnes numeros à binario duplos, quales sunt 2. 4.

8. 16.

8.16 32.64.128.&c.esse pariter pares tantum,hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat,cuiusmodi sũt 6.10.14.18.22.&c. Numeros denique, qui nec à binario dupli sunt,nec dimidios habent impares, pariter pares esse,& pariter impares,vt sunt 12. 20.24. 28. 36.&c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionũ,hos postremos numeros, aliosque similes,vere esse,secundum traditas definitiones,pariter pares;rursus eosdẽ dici recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi sint. Sed hæc planius ex lib.9.intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15.impariter impar dicitur,quoniam numerus impar 3.eum metitur per 5. numerum imparem.Sic quoque hi numeri impares 9.21.25. 27.33. 35. 39. 135.2025.& alij infiniti,impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus est, quem vnitas sola metitur.

QVOD si numerum quempiam nullus numerus,sed sola vnitas metiatur,ita vt neque pariter par,neque pariter impar,neque impariter impar possit dici,appellabitur numerus primus; quales sunt omnes isti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29. 31.&c. Nam eos sola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter se numeri sunt, quos sola vnitas,communis mensura metitur.

SICVT numerus ille, quem sola vnitas metitur, Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatem, nullus numerus, tanquam mensura communis metitur, quamuis singuli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15.8. sunt numeri inter se primi, quia sola vnitas, mensura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. posteriorem vero isti 2.4. tamen nullus istorũ vtrumque metitur, sed sola vnitas vtriusque est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7.10.25. primi inter se dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quamquam postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quiuis numerus, dici possunt, licet improprie; numeri inter se primi: quia sola vnitas vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam mensura communis.

XIII.

COMPOSITVS numerus est, quem numerus quispiam metitur.

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3.5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binariũ, esse impares, quãdoquidẽ ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem,

tem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15.24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7.21.35, Nam primus eorum & seipsum, & reliquos duos metitur, licet per se sumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sũt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6, vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque vicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerũ 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot vnitates in multiplicãte 8. cõtinẽtur, procreauerimusq; eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000, 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procrearive ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel e contrario. Et sic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerũ eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad vnitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantiũ toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicãtium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum

multiplicantium, quam alter multiplicantium ad vnitatẽ habet. Itaque Multiplicatio siue ductus vnius numeri in alium ita quoque describi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantiũ eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda est hæc alia docens quid sit numerum diuidere numerum: quippe quæ necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in ijs, quæ sequuntur, sumus demonstraturi.

NVMERVS numerum diuidere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum sumptus fuerit numerus 8. qui octo suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiso 48. contineri octies. Ita quoq; vicissim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. si acceptus fuerit numerus 6. qui sex suis vnitatibus indicat diuidentem numerum 8. in diuiso 48. contineri sexies.

HINC fit, numerum ex diuisione procreatũ eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuisus habet ad diuidentẽ. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus suis vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiso contineatur; continebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuisus diuidẽtem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuisione genitus ad vnitatem, quam diuisus numerus ad diuidentem. Itaque Diuisio vnius numeri per alium ita quoque poterit describi.

DIVISIO numeri per numerum, est inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eãdem proportionem, quam numerus diuisus ad diuidentem.

ITA vides ex diuisione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuisione eiusdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiso numero per numerum, diuisum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuisionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiso enim numero A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A, gigni ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita se habet ad B, vt C, ad vnitatem D; Ex definitione autem diuisionis, ita quoque se habet A, ad B, vt C, ad vnitatem D; perspicuũ est, numerum ex C, in B, genitum esse numerum A; cum tam ille genitus, quam A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, vnitatem.

A, 48. B. 8. C. 6. D. 1.

HAEC omnia conueniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis: Id est, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (siue fracti adhaereant integris, siue non) multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso contineatur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuisione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuisus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit cõpositus, quot sunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per sui semissẽ

duntaxat est in $\frac{1}{2}$. sumendus est numerus 20. per semissem quoque sui, quæ est 10. Ita quoque vicissim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. si $\frac{1}{2}$ sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties vnitas est in 20. productusq. fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10. ad 20. vt $\frac{1}{2}$ ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. se mutuo multiplicare dicentur quando $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$. sumptus fuerit per sui semissem, quia & $\frac{1}{2}$. semissem tantum continet vnitatis. Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars est numeri $\frac{1}{2}$ siue $\frac{3}{6}$. & semissis numeri $\frac{1}{3}$. siue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusq. ad finem lib. 9.

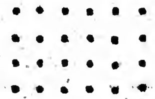
RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiso numero 10. ita vt eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuisi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur $\frac{1}{6}$ quando sumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$ indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiso $\frac{1}{6}$. sed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem sit qui $\frac{3}{6}$. liquido constat tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. cõtineri in $\frac{1}{6}$. Cæterum quo pacto fiat diuisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus, vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuisioneq. fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

OMNIS

OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secũdum suas unitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui



idcirco latera numeri procreati vocantur, quod ipsum contineant, non secus, ac recta linea angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraq. eius sunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum disposita, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus sex vnitates, alterum vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

CAETERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figura plana apud Geometras. Euclides solum definit planũ quadrangularem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quòd omni ex parte quadrato Geometrico, & figura altera parte longiori, similes sint, & aequales, siue ambitũ, siue aream, capacitatemve spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum spectat; tamen si aream, seu capacitatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem vnus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3, & 8. necnon 2. & 12. quia tam ex mul-

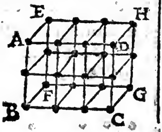
tiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10, quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

QVIA verò omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero vnitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum. Quod etiam de numero solido, qui iamiam definietur, dici potest. Verum est, vnitatem aliquando dici posse numerum planũ, quamuis impropriè; quia eius latera sunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipsam vnitatem producunt.

XVII.

CVM vero tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum disposita referunt figuram quandam solidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. basis solidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas; Et si hac basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus



24. altitudinem habens trium vnitatum. At si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur basis 6. vnitatum, qua multiplicata in 4. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si deniq; numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro base, qua bis sumpta faciet numerũ eundem solidũ 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit BCGF, octo vnitatum, cuius longitudo BC, quatuor vnitates, & BF, latitudo duas cõplectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales, vt totus numerus solidus contineat 24. vnitates, ausq; altitudo BA, vnitates tres. Similiter si basis sit ABFE, sex vnitatum, cuius longitudo AB, tres, & latitudo BF, duas continet vnitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fietque totus solidus numerus rursum 24. altitudinem BC, habens quatuor vnitatum. Si denique basis sit ABCD, 12. vnitatũ, cuius longitudo BC, quatuor continet, & latitudo AB, tres, superponetur illi alia basis similis, & æqualis EFGH, constabitque totus numerus solidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabunt AE, vel BF. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodẽque modo de alijs numeris solidis iudicandum erit.

DENIQVE & vnitas interdum solidus appellabitur numerus, etsi non proprie, quia eius latera sunt tres vnitates, ipsam vnitatẽ ex mutua earum multiplicatione procreantes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis alijs, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione datã; quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui

æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æ-
qualibus numeris continetur.

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æquali eſt, hoc eſt, qui ſecundum vnitates ſuas in longum & latum diſpoſitas, refert parallelogrãmum rectangulum, cuius longitudo latitudini eſt æqualis, ita vt omnia latera ſint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo ſub illis cõtinetur vocat quadratum. Huiuſmodi eſt numerus 25. contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi eius vnitates in formam planam redigantur referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque vnitates, ideoque æqualiter æqualis erit.



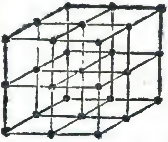
ALTERVTER autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero quadrata ab Arithmeticis pleriſque appellatur.

XIX.

CVBVS vero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.

SOLIDVM quoque illum numerum vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius vnitates in longum, latum, atque profundum diſpoſitæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium

nume-



numerorum inter se producitur, Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 3. 3. 3. siue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam solidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, existuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres vnitates. Quare ipse numerus 27. est æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET vero trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, plerisque autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

X X.

NVMERI proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rõnalis inæqualitatis (cuiusmodi sunt oẽs numeri inæquales inter se collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto esse corruptam, cũ manca sit, atque imperfecta, cõprehendit solũ proportionales numeros in propor*

tione multiplici, submultipliciue, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici sunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; in submultiplici vero, cum primus secundi. & tertius quarti, eadem pars est; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehēdere possumus, quinam numeri proportionales sint in proportione superparticulari, superpartiente, multiplici superparticulari, & multiplici superpartiente. In his enim omnibus, primus numerus secundi, & tertius quarti, neque æque multiplex est, neque eadem pars, neque eadem partes; sed primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel semel, vel aliquoties, & eandem insuper illius partem, easdēue partes; vt perspicuum est ex ijs, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copiosè explicuimus. Itaque hi numeri 12.4.9.3. proportionales sunt, cum primus secūdi, & tertius quarti æque multiplex sit, nimirū triplus. Item hi 4.12.3.9. est enim primus secundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rursus proportionales sunt hi numeri 6,8,9.12. quod primus secundi, & tertius quarti eædem partes sint, videlicet tres partes quartæ. Denique & 7.6.14.12. & 7.4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. sunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus secundum, & tertius quartum, semel, & insuper eandem partem, videlicet sextam; In secundo autem semel, & easdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet: In vltimo denique primus secundum, & tertius quartum, bis, & præterea easdē partes cōplectitur, puta duas partes quintas. Quod si primus numerus secundi, & tertius quarti, nō sit æque multiplex, vel eadē pars, vel eadē partes; vel denique primus secundū, & tertius quartum, nō æqualiter contineat, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes; nullo pacto dicēdi erūt numeri propositi proportionales.

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem

maiores cum minoribus conferantur, quod primus secundi, & tertius quarti, aeque multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, contineat aequaliter, & insuper eandem partem, vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, aeque multiplex concedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, aequaliter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel easdem partes, colligetur numeros esse proportionales. Quod si minores ad maiores referantur, dicanturque eandem habere proportionem, fatendum erit, primum secundi, & tertium quarti, esse partem eandem, vel partes easdem: Et e contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inaequalitatis habẽt. Nam si de proportione aequalitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto aequalem debere esse, ut proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, aequales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundem ad aequales eandem quoque habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, aequales esse. Cum enim aequales numeri sint eiusdem, vel aeque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe eundem aequaliter contineant, eandemque insuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus aequalium sit vel aeque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe illos aequaliter contineat, eandemque insuper eorum partem, vel partes; perspicuum est, aequales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad aequales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eandem habentes eandem proportionẽ, sunt illius vel aequemultiplices, vel eadẽ pars, vel eadem partes; Vel certe illum aequaliter continent, eandemq. insuper eius partẽ, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorũ vel

æque multiplex, vel eadẽ pars, vel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemque insuper illorum partẽ, vel partes. secundum hanc eandem definitionem, manifestũ est numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem, habet, æquales esse.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorẽ. Item numerorũ illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem esse: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si recte hæc definitio intelligatur.

HAEC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. *quia primus secundi, et tertius quarti, æque multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationem reuocẽtur, vt ad* $\frac{6}{8}$. $\frac{3}{8}$. *& posteriores quoque ad eandem denominationẽ, vt ad* $\frac{2}{4}$. $\frac{1}{4}$. *Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationẽ reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finẽ lib. 9. demõstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt* $2\frac{3}{8}$. $4\frac{}{1}\frac{9}{2}$. $1\frac{1}{4}$. $2\frac{}{1}\frac{5}{0}$. *cũ primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur,* $\frac{1}{}\frac{9}{8}$. $\frac{3}{}\frac{8}{8}$. *& posteriores duo ad hos* $\frac{5}{4}$. $\frac{1\,0}{4}$. *atque ita de cæteris.*

XXI.

2 SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero sit similis, non necesse est quælibet duo illus latera quibusuis duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua latera, quæ sint proportionalia quibusdã duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas vnitates in formam planã redigãtur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniam illius latera 6. 4. pro-

portio-

portionalia sunt lateribus huius 3.2.quamuis his eisdẽ non sint proportionalia alia illius latera nempe 8.3.vel 12.2.

EODEM modo vt duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt queuis tria vnius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiãtur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erũt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8.6.4. lateribus huius 4.3.2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12.8.2. vel 16.4.3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24.6. similes, vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3.& 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cũ tamen lateribus prioris assumptis 3.4.16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

HAEC porro similitudo planorum, & solidorũ reperitur quoque in fractis numeris, siue in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tã duo priores, quam duo posteriores inter se multiplicẽtur, procreabuntur plerunque duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerunq; quia fieri potest, vt interdum integri numeri gignantur. Nã si duo latera sint $\frac{2}{3}$. 6. & alia duo $1\frac{1}{3}$. 12. quæ eandem proportionem habent noncuplã, producent priora duo numerum planum 4. posteriora vero numerum 16.

X X I I.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. huius lib.) æquales sunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuius-

modi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumpta conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in unam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vltima lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si vero minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partibus sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici potest, siue eum metiatur, siue non metiatur.

HIS definitionibus ab Euclide propositis adiungenda mihi videntur ex Campano, alijsque scriptoribus nonnulla alia, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim ea, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicãs, vel a quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero, vt propos. 16. huius

lib.oste ndemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4.in 3.qui ex 3.in 4.manifestum relinquitur, eundem numerũ 12.procreari,si numerus 4. multiplicet numerũ 3.

HAEC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$*.metiri dicitur numerũ* $13\frac{1}{1}\frac{5}{2}$*. per* $5\frac{3}{4}$*.quia multiplicatus per* $5\frac{3}{4}$*. gignit* $13\frac{5}{1}\frac{}{2}$*.*

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve; vel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

SI numeeus 20.cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur hac comparatio, habitudove, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20.cum numero 60.confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVAE cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin.20.docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam ratio-

nem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecũdum: Et ſemper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HAEC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copioſe explicata eſt defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi ſcripſimus, ad numeros huc transferri facile poſſint, non eſt, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine poſitis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad ſecundum, & ſecundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita ſe habere, pluribus verbis à nobis demonſtratum eſt ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuerſaque; de compoſitione, diuiſione, & conuerſione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata, Omnes. n. hi modi argumentationum, quæ circa proportiones verſantur, demonſtrabuntur quoque hoc ſeptimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet poſſe ſumi æquales, vel multiplices.

QVO-

I I.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, sed necessario ad unitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinite per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi potest, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem æque multiplices sunt, inter se sunt æquales.

I I.

QVORVM idem numerus æque multiplex est, vel æque multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

I I I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum metitur.

NAM vnitas ſumpta toties, quot ſunt in numero propoſito vnitates, ipſum cōſtituit. Quamobrem ipſum metitur per vnitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numeum ex ſuis vnitatibus conſtitutum.

VI.

OMNIS numerus ſeipſum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus ſemel ſumptus ſibi ipſi ſit æqualis, manifeſtum eſt, omnem numerum ſeipſum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicãs productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C, Dico A, metiri ipſum C, per B; & B, eundē C, per A. Cum enim ex defin. 15, numerus B, toties compoſitus conſtituat ipſum C, quot ſunt in A, vnitates; perſpicuum eſt B, metiri ipſum C, per A, & eadem ratione A, ipſum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipſum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonſtrabitur propoſ. 16. huius lib.

A .... B ...
C ....

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur

per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, vel multiplicatum a B, producere ipsum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23.

A .... B ...

C ....

Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipsum C.

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

METIATVR numerus A, numeros BC, CD. Dico eundem A, metiri quoque ex ipsis compositum BD. Cum enim A, metiatur ipsos BC, CD; erit tam BC, quam CD, ipsius A, multiplex. Diuiso ergo BC, in partes BE, EC, ipsi A,

æquales

A . . . .

B . . . . E . . . . C . . . . F . . . . G . . . . D

æquales,& ipso CD, in partes CF, FG, GD, eidem A, æquales; erit numerus BD, compositus ex omnibus partibus BE, EC, CF, FG, GD, ipsi A, æqualibus, multiplex ipsius A. Quare A, ipsum BD, metitur. Quod est propositum.

XI.

NVMERVS quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerũ, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerũ CD. Dico eundem A, metiri quoque numerum CD, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipsum CD, erit CD, ipsius B, multiplex. Diuiso ergo CD, in partes CE, ED, ipsi B, æquales; metietur A, ipsos numeros CE, ED, quandoquidem numerũ B, tã numero CE, quã numero ED, æqualẽ, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum CD, ex CE, ED, compositum. Quod est propositum.

A . . .

B . . . .

C . . . . E . . . . D

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatũ, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum BC, & ablatum BD. Dico eundem A, metiri quoque reliquum DC. Cum enim A, metiatur & BC, & BD: erit tam BC, quã BD, ipsius A, multiplex, aut certe BD, ipsi A, æqualis erit. Diuise ergo tam BC, quam BD, in partes ipsi A, æquales: erit reliquus numerus DC, vel vna pars numeri BC, ipsi A, æqualis, vel plures,

A . . .

B . . . . D . . . C

B . . . . D C

B . . . D C

atque adeo DC, aequalis erit ipsi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipsum DC. Quod est propositum.

THEOR. 1. PROPOS. 1. I

SI duobus numeris inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentẽ, quoad assumpta sit vnitas; qui principio propositi sunt numeri, primi inter se erunt.

SINT duo numeri propositi inæquales AB, CD, quorum CD, minor ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB: Et in

A . . . . E . . G . B

C . . . F . . D

H -----

hac alterna detractione nunquã numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, esse inter se primos, hoc est, solam vnitatem communi mensura eos metiri. Si.n. non dicantur inter se primi, metietur eos aliquis numerus, qui sit H, communi mensura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD; & CD, numerum AE, (quod CD, vel pars sit ipsius AE, vel certe ei æqualis, cum detractus ex AB, reliquerit numerum EB,) [a] metietur quoque H, ipsum AE: At H, metitur quoque totum AB. [b] Igitur & reliquum EB, metietur. Metitur autem EB, ipsum CF. [c] Igitur & H, ipsum CF, metietur; Ac propterea, cum & totum CD, metiatur, [d] metietur quoque reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipsum EG; [e] metietur etiam H, ipsum EG: Metiebatur autem & H, totum EB. [f] Reliquam igitur vnitatem quoque GB, numerus H, metietur, partem totum. Quod est absurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metitur: Ac

a 11. prõ.
b 12. prõ.
c 11. prõ.
d 12. prõ.
e 11. prõ.
f 12. prõ.

proinde primi inter se sunt. Quamobrem, si duobus numeris inæqualibus propositis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS cum Campano hunc propositionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas.

SINT duo numeri inter se primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties potest detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedẽtem, quoad vnitas assumatur.

A . . . . E . . . G - - B

C . . . . F . . D

Metiatur enim, antequã ad vnitatem detractio perueniat, si fieri potest, reliquus numerus GB, præcedentem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur
a 11. prõ. *numerus GB, numerum FD, metitur; & FD, ipsum EG, [a] metietur quoque GB, ipsum EG. Cum ergo GB, & seipsum*
b 10. prõ. *metiatur, [b] metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, cõ-*
c 11. prõ. *positum: Metitur autem EB, ipsum CF. [c] Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipsum FD, posi-*
d 10. prõ. *tus sit metiri: metietur [d] quoque ipsum CD, ex CF, FD,*
e 11. prõ. *compositum. At vero CD, metitur ipsum AE. [b] Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde, cum &*
f 10. prõ. *ipsum EB, metiatur, vt ostensum est; [f] metietur & ipsum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.*

EODEM modo & hoc verum est.

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vsque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

NAM si detractio huiusmodi ad vnitatem vsque perueniret, essent propositi numeri inter se primi, a vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi. a 1. sept.

EX his facile dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nunquã reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, b vt Euclides demonstrauit: Si vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superiori huius scholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, ostensum fuit, eundem reliquum GB, vtrumque AB, & C D, metiri. b 1. sept.

PROBL. 1. PROPOS. 2. ij.

DVOBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri A B, C D, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor C D, ex maiore A B, quoties potest, relinquatque EB, numerum, qui ex C D, subtractus relinquat FD, & sic deinceps semper minor de ma-

A ....E.......B
C . : . . . . F . . D
G ------

iore, subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedẽtem

[a] 1, *sept.* metiatur Nam si ad vnitatẽ deueniretur, [a] numeri A B, C D, essent inter se primi; quod est contra hypothesim. Peruentum ergo iam sit ad reliquum numerum F D, qui detractus ex EB, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico F D, esse maximam mensuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita ostẽdemus.
[b] 11. *prõ.* Quia FD, metitur ipsum EB, & EB, ipsum CF; [b] metietur quoque F D, ipsum CF, atque adeo cũ & seipsum metia-
[c] 10. *prõ.* tur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compositum. At
[d] 11. *prõ.* CD, ipsum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum F D, metiatur quoque ipsum
[e] 10 *prõ.* EB; [e] metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Metitur igitur FD, vtrumque numerũ AB, CD.

QVOD autem FD, sit maxima mensura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quàm FD. Quoniam ergo G,
[f] 11. *prõ.* metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipsum A E, [f]
[g] 12. *prõ.* metietur quoque G, ipsum AE. [g] Igitur & residuum E B:
[h] 11. *prõ.* At vero EB, metitur C F. [h] Metietur ergo & G, eundem
[i] 12. *prõ.* CF. [i] Igitur & residuum F D; maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quam F D, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima est mensura numerorum AB, CD.

QVOD si minor numerus C D, metiatur maiorem A B, ita vt detractus ex A B, nihil relinquat, erit ipse maxima amborum mensura communis, cum & se ipsum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.

A ....B
C ......D

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, numerum metientem duos numeros, metiri quoque maximam eorundem communem mensuram.

HOC

HOC elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit FD, esse maximam mensuram ipsorum AB, CD. Demõstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum mensuram communem. Eademque ratio est de cæteris.

SCHOLIUM.

EX ijs quæ dicta sunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propos. 1. docuimus, an duo A, & B, sint inter se primi: Qui si fuerint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter se primos.

A . . . .
B . . . .
C . . . . . .

SI vero A, & B, fuerint inter se compositi, a sit eorum maxima mensura communis inuenta D; quæ si metiatur & numerum C, perspicuũ est, tres numeros A, B, C, esse inter se compositos, cum habeãt numerum D, communem mensuram. a 2. sept.

A . . . .
B . . . .
C . . . . . .
D . .

QVOD si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C, & D, vel inter se primi, vel non: Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita vt habeant numerum communẽ mensuram; metietur eiusmodi communis mensura numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cũ eadem illa mensura metiatur quoq; numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesim.

A . . . .
B . . . . . .
C . . . . .
D . .

Si autẽ C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se cõpositi. b Inuenta enim numerorũ C, & D, maxima mensura communi E; cũ E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & b 2. sept.

A . . . .
B . . . .
C . . . . . .
D . . . , E . .

a 11. pron. *B; [a] metietur quoque E, eosdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se erunt compositi. Quod est propositum.*

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

iij.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensuram communem oporteat reperire. [b] Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipsum C, perspicuum est D, esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C, Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod est absurdum.

A.....................
B..............D.....
C.......B.. F—

Si vero D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A, B, C, inter se compositi, metietur quęcunque illorum mensura communis, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se
c 3. sept. compositi. [c] Sit eorum maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D, at D, ipsos A, & B, [d] metietur quoque E, ipsos A.
d 11. prō.

& B,

& B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

QVOD autem E, sit maxima eorum communis mẽsura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quã E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communem: Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod est absurdũ. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eademque in cæteris est ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinque, quatuor numerorum accipiẽda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua vero omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

THEOR. 2. PROPOS. 4. iiij.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B.

Sint enim primũ A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars est numeri B; perspicuũ

A . . . .
B . . . .

est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, vnitates.

SINT deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestum est A, partẽ esse numeri B, ex defin. 3. huius lib.

A . . . .
B . . . .

a2.sept. SED iam A, non metiatur ipsum B, a inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes AD, DE, EF, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. b Quia igitur C, pars est ipsius B, cum ipsum metiatur; erit quoque AD, pars eiusdem B: similiter & DE, & EF; ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in AF, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

b3.defi.

A . . D . . E . . F
B . . . .
C . .

V. THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusque simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri BC, quæ est numerus D, numeri EF. Dico vtrumque numerum A, & D, simul vtriusque numeri BC, & EF, simul eãdem esse partem, quæ est vel A, ipsius BC, vel D, ipsius EF. Diuisis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC; EH, HF, ipsis A. & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, propterea quod eadem pars est A, ipsius BC; quæ D, ipsius EF. Quia igitur A, & BG, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & EH; erunt A, & D, simul ęquales ipsis BG, & EH, simul. Eodem argumento erunt A, & D, simul ipsis GC, & HF,

A . . . . . . | D . . . . .
B . . . . . G . . . . . . C | E . . . . H . . . . F

simul

ſimul æquales: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in BC, EF; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum BC, & EF, æquale erit, quoties A, in BC, vel D, in EF, cōtinetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, ſimul vtriuſque BC, & EF, ſimul, quę eſt A, ipſius BC, vel D, ipſius EF. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt in numeris fractis, eademq; prorſus demonſtratio adhibebitur: vt in hoc exēplo apparet, vbi numerus A, numeri BC, &

A, $\frac{2}{9}$	D, $\frac{1}{7}$
B, $\frac{2}{9}$ G, $\frac{2}{9}$ C	E, $\frac{1}{7}$ H, $\frac{1}{7}$ F

numerus D, numeri EF, eadem pars eſt; ac proinde vterque ſimul A, D, vtriuſq; BC, EF, ſimul eadem pars oſtendetur, quæ A, ipſius BC: ſi nimirum BC, EF, diuidantur in partes BG, GC; EH, HF, ipſis A, D, æquales, &c.

QVOD ſi quando contingat, numerum fractum diuidi non poſſe in partes æquales propoſitas, propterea quòd numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partiū. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquiualens, & cuius numerator in propoſitas partes diuidi poteſt. Vt ſi fractio $\frac{5}{9}$. *ſecanda ſit in duas partes æquales, ducendus erit vterque eius numerus in 2. ſi in tres, in 3. ſi in quatuor, in 4. &c. vt gignantur fractiones* $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. *quarum prima ſecabitur in has duas partes æquales* $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. *ſecunda in has tres* $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. *tertia vero in has quatuor,* $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

RVRSVS quando adſunt integra, reuocanda prius erũt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quàm denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt ſi numerus $4\frac{3}{7}$. *ſecandus ſit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem,* $\frac{31}{7}$. *deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio* $\frac{93}{21}$. *cuius tres partes æquales ſunt* $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. *Atque hæc in ſequentibus quoque propoſitionibus obſeruanda ſunt, quando fractionibus accommo-*

dantur: Et semper nomine fractionum intelligendi quoque sunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti sunt, & alij integri.

EODEM modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

Hoc autem perspicue in his appositis exemplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A.	D.	A.	D...
B. G. C	E. H. F	B. G. C	E... H... F

POSSVMVS etiam hanc propositionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, singuli singulorum, eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omnium numerorum DE, FG, HI, simul eandem esse partē, quæ est A, ipsius DE, Diuisis. n. numeris

A...	B...	C..
D....K....E	F...L...G	H..M..I

DE, FG, HI, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tam numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales sunt; si illis addantur æquales B, & FL, erunt A, B, simul æquales ipsis DK, FL, simul: quibus si rursum

addantur æquales C, & HM; erunt quoque A, B, C, simul æquales ipsis DK, FL, HM, simul. Simili ratione erunt A, B, C, simul æquales ipsis KE, LG, MI, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorũ A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, simul ipsorum DE, FG, HI, simul, quæ A, ipsius DE.

IDEM sequitur, si loco vnius numerorum A, B, C, sumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

A.	B..	C...	A.	B.	C.
D.K.E.	F.. L.. G	H.. M.. I	D.K.E	F.L..G	H.M.I

HAEC etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadẽ pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur; etiamsi aliqui numerorum sint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1.	B, $\frac{1}{2}$	C, $\frac{1}{4}$
D 1 K 1 E	F $\frac{1}{2}$ L $\frac{1}{2}$ G	H $\frac{3}{4}$ M $\frac{3}{4}$ I

THEOREMATI quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singolorum, æque multiplices: quam multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiã demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, singuli singulorũ. Dico &

A........ B........ C........

D...... E...... F......

A........B.......C.....
D.... E... F..

omnes A, B, C, simul omnium D,E,F, simul tã multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D. Cum. n. tam sit multiplex A, ipsius D, quam est B. ipsius E, & C, ipsius F: erit e contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper a nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadẽ pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quam est multiplex A, ipsius D.

SI numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorũ æquemultiplices; quã multiplex est vnius vnus, tã multiplices erũt & omnes omniũ. Vt ex demonstratione liquet.

QVOD si loco vnius numerorum D, E, F, assumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonstrabitur, vt ex sequentibus figuris apparet.

A .. B .... C	*A .. B .. C ..*
D . E .. F ...	*D . E . F .*

vj. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumque numerum AB, & DE, simul vtriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ est AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB; DH, HE, numerorum C, & F: erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partium in numero DE; propterea quod eædem partes est numerus

A ... G ... B	D .... H ..... E
C	F ....

AB,

AB,numeri C,quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars est AG,numeri C, eadem est DH, numeri F; a erit vterque AG, DH, simul eadem pars vtriusque C,F, simul,quæ AG,ipsius C,vel DH, ipsius F. Eadem ratione erit vterque GB, HE, simul eadem pars vtriusque C, F, simul,quæ GB,ipsius C,vel HE, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in AB,DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB,DE, contenta; quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul; quæ pars est AG,ipsius C;quot partes eædem est numerus AB, ipsius C,vel DE,ipsius F: Ac proinde eædem partes erit vterq; numerus AB,DE, simul,vtriusque numeri C,F,simul,quæ AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit,&c. Quod erat demonstrandum.

a 5.sept.

SCHOLIVM.

EADEM hæc propositio locum habet in numeris fractis,vna cum demonstratione: vt hoc exemplum demõstrat:

A, $\frac{1}{9}$ *G*, $\frac{1}{9}$ *B* *D*, $\frac{2}{7}$ *H*, $\frac{2}{7}$ *E*

C, $\frac{3}{9}$ *F*, $\frac{6}{7}$

SED & hanc propositionem ad quotcunq; numeros siue integros,siue fractos extendẽtes, hoc modo amplificabimus.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt,quæ vnus vnius.

EADEM enim est demonstratio, si modo pro quinta propos. assumatur id,quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; vt hic perspicuum est.

A .. *K* .. *B* | *C* ... *L* ... *D* | *E* .... *M* .... *F*

G ...... | *H* .... | *I* ....

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis

ablatus ablati : Et reliquus reliqui eadem pars erit,qualis totus totius.

SIT numerus AB,eadẽ pars numeri CD, quę ablatus AE,ablati CF. Dico reliquum E B, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB,totius CD.Ponatur enim EB,numeri GC,eadẽ pars, quæ

A....E..B
G.... C.,....... F....D

est AE,ipsius C F , vel totus A B,totius CD. Quia igitur
25.sept. AE,eadem est pars ipsius CF,quæ EB,ipsius G C : a erit vterque AE,EB, simul eadem pars vtriusque simul C F , GC,quæ AE,ipsius CF,hoc est,quæ totus AB,totius CD; Ac propterea cum AB,eadem sit pars vtriusque numeri FG,CD,erunt ipsi numeri FG,CD,inter se æquales.Dēpto ergo communi CF,æquales remanebunt G C, F D. Eadem igitur pars erit EB,ipsius FD,quę ipsius GC,hoc est,quæ totus AB,totius C D. Si igitur numerus numeri pars fuerit,&c.Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{2}$ *E,* $\frac{2}{5}$ *B,*
G, $\frac{4}{5}$ *C,* $\frac{6}{8}$ *E,* $\frac{4}{5}$ *D*

LOCVM etiam habet hac propositio, vna cum eius demonstratione in numeris fractis,vt hic apparet.

IDEM hoc theorema verum est , tam in numeris integris,quam in fractis,etiamsi ablata sit vnitas AE,vel reliqua fuerit vnitas EB,vel denique in integris & ablata,& reliqua sit vnitas,vt ex his exemplis apparet.

A.E...B	*A ...E . B*	*A. E,B.*
G...... C..F...... D	*G.. C ...... F.. D*	*G,. C,. F.. D*

CAETERVM & ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus,tam in numeris integris, quam in fractis.

SI numerus numeri ęque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, aque multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita esse multiplicem, vt est totus AB, totius CD. Cum enim AB, ipsius CD, sit aque multiplex, atque AE, ipsius CF, erit e contrario totus CD, totius AB, eadem pars, qua ablatus CF, ablati AE,[a] Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, qua totus CD, totius AB, Ac proinde e contrario EB, ita multiplex erit ipsius FD, vt AB, ipsius CD, est multiplex.

A . . . . . E . . . . B
C . . . F . . D

[a] 7. sept.

QVOD si ex CD, ablata fuerit vnitas CF, vel reliqua sit vnitas FD. vel denique in integris & ablata sit vnitas CF, & alia reliqua FD, idem demonstrabitur. vt hac exempla commonstrant.

A . . . E	A . . . . E . . B	A . . . . E . . . . B
C . F . . D	C . . F . D	C . F . D

THEOR. 6. PROPOS. 8. viij.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati; Et reliquus reliqui eædẽ partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD; quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, easdem esse partes reliqui FD, quæ totus AB, est totius CD. Sumpto enim numero GH, æquali ipsi AB, erit GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, hoc est, quæ AE, ipsius CF. Diuiso ergo

A ...... K ...... E ..... B
C .... F ...... D
G ...... L .. I ...... M .. H

GH, in partes G I, IH,numeri CD; & AE,in partes A K. KE,numeri CF,erit multitudo partium GI,IH, multitudini partium AK,KE,æqualis, eademque pars tam G I, quam I H, ipsius CD,quæ tam AK, quam KE, ipsius CF.Cum ergo CD,numerus maior sit numero C F,

A ...... K ...... E .... B
C................ F ...... D
G ..... L .. I ..... M .. H

erit & tam GI,quam IH,pars ipsius CD,maior tam numero AK,quam KE,parte ipsius C F, Sumptis igitur numeris GL,IM æqualibus ipsis AK,KE,erit GL, eadẽ pars ipsius C F , quæ AK, eiusdem CF,hoc est,quæ GI,ipsius C D; Ac proinde cum totus G I , totius C D , sit eadem pars,quæ ablatus GL,ablati CF,[a] erit & reliquus LI,reliqui FD,eadem pars,quæ totus GI,totius CD.Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partem ipsius FD,quæ est totus GI,vel IH,totius C D. Quoniam ergo tam GI,quam IH,eadem est pars ipsius CD,quæ est tam LI,quam MH,ipsius FD;erit vterque GI, IH,simul eædẽ partes ipsius CD,quæ vterque L I , MH , ipsius F D. Est autem GH,eædem partes ipsius CD,quæ A B , eiusdem CD,propter æqualitatem numerorum AB, GH.Igitur & vterque LI,MH,simul eædem partes erit ipsius FD, quæ AB,ipsius CD.Quia vero si ab æqualibus AB,GH,æquales auferantur AK,KE,& GL,IM,reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt;Erit quoque EB,reliquus eædem partes reliqui FD,quæ AB, totus totius CD , nimirum eædẽ quæ vterque LI,MH,simul erat eiusdem FD,Si numerus ergo numeri partes fuerit,&c. Quod erat ostendendum.

[a] 7. sept.

S C H O L I V M.

A, $1\frac{2}{9}$ *K*, $1\frac{2}{9}$ *E*, $1\frac{6}{9}$ *B*
C, $1\frac{3}{9}$ *F*, $1\frac{9}{9}$ *D*
F, $1\frac{2}{9}$ *L*, $1\frac{3}{9}$ *I*, $1\frac{2}{9}$ *M*, $1\frac{3}{9}$ *H*

IN numeris fractis eadem hæc propositio eodẽ prorsus modo demonstrabitur , vt hic manifestum est .

NON demõstrauit Euclides *hanc propositionẽ,quemadmodum præcedentem , quod nonnulli interpretes faciunt*

quia

quia non constabat hic reliquum numerum EB, alicuius numeri easdem esse partes, quæ est numerus AE, numeri CF, ibi vero perspicuum erat reliquum EB, alicuius numeri eãdem esse partẽ, quæ est AE, ipsius CF. Licet enim ipsius E B, duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec E B, sit ita submultiplex numeri assumpti GC, vt AE, est submultiplex ipsius CF.

THEOR. 7. PROPOS. 9. ix.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti.

SIT numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, ſintque A, BC, minores ipſis D, EF, ſinguli ſingulis. De his enim propoſitio intelligenda eſt. Dico & viciſſim eandem partem eſſe, aut eaſdem partes A. ipſius D, qualis eſt, aut quales B C, ipſius EF. Diuiſis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partiũ numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia vero BG, GC, inter ſe ſunt æquales, & minores quam EH, HF, quæ inter ſe etiam æquales ſunt, quod & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipſius EH, eadẽ pars, aut partes, quæ GC, ipſius HF, [a] ac propterea & vterque BG, GC, ſimul, nimirum B C, ſecundus vtriuſque EH, HF, ſimul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipſius E H; hoc eſt, quæ A, primus ipſius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit &c. Quod demonſtrandum erat.

A....
B .... G C
D ......
E ...... H ...... F

[a] 5. vel 6. sept.

SCHO-

SCHOLIVM.

A, $\frac{1}{1}\frac{3}{1}$
B. $\frac{1}{1}\frac{3}{1}$ G, $\frac{1}{1}\frac{3}{1}$ C
D, $\frac{1}{2}\frac{4}{2}$
E, $\frac{1}{2}\frac{4}{2}$ H, $\frac{1}{2}\frac{4}{2}$ F

IN numeris fractis propositio hæc, una cum eius demonstratione locum etiam habet, ut hic perspicuum est.

QVOD si loco primi numeri unitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit vicissim unitas tertij numeri eadem pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, ut ex hoc exemplo apparet.

A.
B . G . C
D . . . . . .
E . . . . . . H . . . . . . F

THEOR. 8. PROPOS. 10.

x.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

SIT numerus AB, eędem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F, sintq. AB, C, ipsis DE, F, minores, singuli singulis. De his n. etiam intelligēda est hæc propositio, sicut & antecedens. Dico & vicissim numerum AB, easdem partes esse, aut partem numeri DE, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partiū in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quam GB, eadem pars ipsius C, quæ tam DH, quam HE, ipsius F.[a] Vicissim ergo eadem pars erit aut partes AG,

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . . H . . . . . E
F . . . .

[a] 9. sept.

ipsius

ipsius DH, & GB, ipsius HE, quæ C, ipsius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipsius DH, quæ GB, ipsius HE. [a] Igitur & vterque AG, GB, simul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vtriusque DH, HE, simul, nimirũ DE, tertij, quæ AG, ipsius DH, hoc est, quæ C, secũdus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonstrandum erat. [a 5. vel 6. septi.]

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propos. demonstratio, vt in hoc exemplo apparet.

A, $\frac{2}{3}$ G, $\frac{1}{3}$ B
C, $\frac{5}{6}$
D, $\frac{1}{9}$ H, $\frac{1}{9}$ E
F, $\frac{1}{6}$

THEOR. 9. PROPOS. II. xij.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquũ FD, esse, vt est totus AB, ad totũ CD.

A . . . . E . . . . . . B
C . . . . . F . . . D

Cum enim sit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; [b] erit AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. Sit primum AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, æque multiplex. Quo posito, erit e contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æque multiplices ipsorũ CD, CF. [c] Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea e contrario AB, ipsius CD, & EB, ipsius FD, æque multiplex erit. [d] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. [b 20. defin.] [c 7. sept.] [d 20. defin.]

SIT deinde AB, ipsius CD,& AE,ipsius CF,eadem pars,vel eædem partes. Quo posito, [a] erit & reliquus E B, reliqui FD,eadem pars,vel partes,quæ totus AB,totius CD; [b] Ac proinde, erit vt totus AB,ad totum CD,ita EB,reliquus ad reliquum FD.

a 7. vel 8. sept.
b 20. def.

A . . . E . . B
C . . . . . F . . . . D
A . . . . E . . B
C . . . . . . F . . . D

CONTINEAT tertio AB,ipsum CD, & AE, ipsum CF,æqualiter,eâdemque insuper illius partem, vel partes.Quo posito,erit e contrario CD,totus totius AB,eędem partes,quæ ablatus CF,ablati AE, vt mox demonstrabimus.[c] Reliquus igitur FD,reliqui EB,eadem quoque partes erit,quæ totus CD,totius A B: Ac propterea e contrario AB,ipsum CD,& EB,ipsum F D , æqualiter continebit,eandemque insuper illius partem,vel partes vt mox ostendemus.[d] Quare erit,vt totus AB, ad totum CD,ita EB,reliquus ad reliquum FD.

c 8. sept.
d 8. sept.

A . . . . . E . . . B | A . . . . E . . . . B
C . . . F . . D | C . . . . . F . . . . D

QVOD si AB, totus toti CD,æqualis fuerit,& ablatus AE,ablato CF; perspicuum est reliquum EB, quoque esse æquale reliquo F D. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent sunt æqualia. Itaque si fuerit,vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum,&c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . . E . . . B
C . . . . . F . . . D

S C H O L I V M.

EODEM modo demonstrabitur hoc in fractis numeris Id quod liquido constat in his exemplis,quæ exemplis tertij casus demonstrationis respondent.

$A, \frac{6}{9}\ E\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{9}\ B$ | $A, \frac{1}{2}\ \frac{4}{3}\ E\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{9}\ B$

$C, \frac{4}{9}\ F\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{9}\ C$ | $C, \frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\ F\ \frac{1}{2}\ \frac{0}{9}\ D$

LEMMA.

QVOD autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsũ CF, æqualiter contineat, eãdemq; insuper partẽ illius vel partes; e contrario CD, ipsius A B, & CF, ipsius AE, sit eadẽ partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius A E, sit eadem partes; e contrario AB, ipsũ CD, & AE

A	..	N	..	O	..	G	..	B
C	..	I	..	K	..	D		
A	...	P	...	Q	...	H	...	E
C	...	L	...	M	...	F		

ipsum CF, æqualiter contineat, eandemque illius partẽ vel partes, tã in numeris fractis, quã in integris: hoc modo demonstrabimus. Contineat primum A B, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemque insuper partem, GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, CF, vel eorũ æque multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partiũ numeri CD, multitudini partiũ numeri CF, æqualis, quod GB, ipsius CD, sit eadẽ pars, quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partiũ numeri AG, multitudini partiũ numeri AH, æqualis. Cum. n. AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorũ æq; multiplices, erũt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partiũ numeri CD, toties cõtinebi

tur in A G, *quoties numerus partium numeri* CF, *in* AH; *propterea que multitudo partium numeri* AG, *multitudini partium numeri* AH, *æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes* GB, HE, *erit & multitudo partiũ numeri* AB, *multitudini partium numeri* AE, *æqualis: Atque adeo vna pars numeri* C D, *eadem pars erit numeri* AB, *quæ vna pars numeri* CF, *est numeri* AE. *Quare cũ multitudo partium numeri* CD, *æqualis sit multitudini partiũ numeri* CF, *erit* CD, *eædẽ partes numeri* AB, *quæ* CF, *ipsius* AE.

CONTINEAT *deinde* AB, *ipsum* CD, *&* AE, *ipsum* CF, *æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterue, &c. easdemque insuper partes illius; numerus quidem* AB, *partes* GB, *numeri* CD, *& numerus* AE, *partes* HE, *numeri* CF: *ita vt reliqui numeri* AG, AH, *sint rursum vel æquales ipsis* CD, CF, *vel eorum æquemultiplices. Diuisis igitur numeris* GB, HE, *in partes* GI, IB, *&* HK, KE, *numerorũ* CD, CF, *erit multitudo partium ipsius* GB, *multitudini partium ipsius* HE, *æqualis. Simili modo, diuisis numeris* C D, C F, *in partes* CL, LM, MD, *&* CN, NO, OF, *partibus* GI, IB, *&* HK, KE, *æquales, erit quoque multitudo partiũ ipsius* C D, *multitudini partium ipsius* C F, *æqualis, propterea quod quælibet partium numeri*

A . P . . Q . . G . . I . . B
C . . L . . M . . . D
A . . . R . . . S . . . H . . . K . . . E
C . . . N . . . . O . . . F

GB, eadem pars est numeri CD, quæ vnaquæque partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partiũ numeri AG, æqualis multitudini partiũ numeri AH. Cum enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquemultiplices; erũt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH, proptereaque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoque multitudo partium numeri AB, multitudini partiũ numeri AE, æqualis; Atque adeo vna pars numeri CD, eadẽ pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partiũ numeri CF, erit CD, eædẽ partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primo propositum.

IAM vero sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius, AE, eædem partes. Dico e cõtrario AB, ipsũ CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, vel partes. Diuisis .n. numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter se æquales. Itẽ diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multi-

tudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, *in AB, superêritque eadem pars, vel partes ipsius* CD, *quoties omnes partes numeri* CF, *continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius* CF, *supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum* CD, CF, *& AB*, AE. *Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum* AB, *AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum* CD, CF, *& insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum* CD, CF, *multitudine æquales. Quam ob rem AB, ipsum* CD, *&* AE, *ipsum* CF, *æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem vel partes. Quod secundo est propositum.*

xiij. THEOR. 10. PROPOS. 12.

SI sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedẽtium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc est, ut A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoq; oẽs A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, ut est A, ad B. Sint enim primum A, C, E, minores quã B, D, F.

A . . . . C . . E . . .
B . . . . D . . . . F . . . . .

a 20. def. Quoniam igitur, propter eandem proportionem, [a] eadem pars est, aut partes, A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F, [b] erit quoque uterque A, C, simul utriusque B, D,
b 5. vel 6. sept. simul, eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, uel E, ipsius

F; Rur-

F. Rursus quia uterq; A, C, simul, tãquã unus, utriusq; B, D, simul, tanquã unius, eadẽ pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; [a] erunt & ambo A, C, tãquam vnus, & E, simul, ambo-rum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B. [b] Quare eadem proportio est omniũ A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B. a 5. sept. b 20. def.

SINT deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit e contrario B, ipsius A, eadem pars, quæ D, ipsius C, & F, ipsius E; Atque adeo vt prius, [c] erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul, eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoque & e contrario omnes A, C, E, simul omnium B, D, F, simul, & A, ipsius B, æque multiplices. [d] Quare eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. Hoc idem uerum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, uel etiam omnes, sint numerorum ad unitatem. Est enim eadẽ semper demonstratio, ut hic apparet, adiuuante tamen scholio propos. 5. huius lib. c 5. sept. d 20. def.

A ...... C ...... E ......
B .... D .. F ...

A ... C ..... E .... | A ... C ... E ...... | A ... C ... E ...
B . D ... F ... | D . D . F .. | B . D . F .

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. [e] Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipsum B, & C, ipsum D, & E, ipsum F, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propos. B, ipsius A, & D, ipsius C, & F, ipsius E, eædem partes. Igitur ut prius, [f] erunt omnes B, D, F, simul omnium A, C, E, simul eædem partes, quæ ipsius A; atque adeo per idem lemma, e contrario continebũt oẽs numeri A, C, E, simul oẽs numeros B, D, F. simul, & A, ipsũ B, æqualiter, eandẽq. insuper partẽ, uel partes. e 20. def. f 6. sept.

A .... C .... E ....
B ...... D ... F ....

a 20. defin. a Quare eadem proportio est omnium A,C,E, simul, ad omnes B,D,F, simul, quę ipsius A, ad B.

SINT quarto & vltimo A, C, E, ipsis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, simul æquales ipsis B, D, simul: quibus si rursum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, simul omnibus B, D, F, simul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, cum vtrobique sit proportio æqualitatis. Si sint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . C . . . E . . . . .
B . . . D . . . E . . . . .

SCHOLIVM.

IN numeris quoque fractis propositio hæc vera esse eodem modo conuincetur, vt patet, si pro numeris integris fracti assumantur.

xiiij.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et vicissim proportionales erunt.

SINT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim esse A, ad C, vt B, ad D. Nam sint primum A, & C, minores quã B, & D; & A, quoque minor, quam C. Quo posito, erit, propter eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, eadem pars, vel partes. b Vicissim ergo & A, ipsius C, & B, ipsius D, eadem pars erit, vel partes: c Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A . . . C . . . . .
B . . . . D . . . .

b 9. vel 10. sept.

c 20 defin.

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem, C, ipsius D, & A, ipsius B, eadẽ pars, vel partes. d Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadẽ pars erit, vel partes: Atque adeo e contrario, vel A, ipsius C, & B, ipsius D, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum

d 9. vel 10. sept.

A . . . . C . . .
B . . . . D . . . .

C, &

C,& B,ipsum D,æqualiter continebit, eandemque insuper partẽ, vel partes. a Quare erit vt A,ad C,ita B,ad D. a 20. defin.

SINT tertio A,& C,maiores quam B,& D;at A,minor quam C. quo posito, erit ob eandem proportionem, vel A,ipsius B,& C,ipsius D, æque multiplex;vel certe A,ipsum B,& C,ipsum D,continebit æqualiter, eandemque insuper partẽ, vel partes;Atq; adeo e cõtrario erit B,ipsius A,& D,ipsius C,vel eadem pars,vel certe, per lemma propos. 11. huius lib.eædem partes. b Vicissim ergo & B,ipsius D,& A,ipsius C,eadem pars erit,vel partes. c Ac proinde eadem proportio erit B,ad D,quæ A,ad C, hoc est, erit vt A,ad C,ita B,ad D. b 9. vel 10. sept. c 20. defin.

A . . . . C . . . .
B . . . D . . . .

SINT quarto A,& C,maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C.Quo posito,erit C,ipsius D,& A, ipsius B,ob eandẽ proportionem,vel æque multiplex,vel certe C, ipsum D, & A, ipsum B , æqualiter continebit, eandemque insuper partem,vel partes;Atq; adeo, e contrario,erit D,ipsius C,& B,ipsius A, vel eadẽ pars,vel certe,per lemma propos. 11. huius lib. eędem partes. d Vicissim ergo & D , ipsius B , & C, ipsius A, eadem pars erit , vel partes ; Ac propterea e contrario vel B,ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit,vel certe,per lemma propos.11.huius lib. B, ipsum D,& A,ipsum C,continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes. e Quare eadem proportio erit B, ad D,quæ A,ad C,hoc est,erit vt A,ad C,ita B, ad D. d 9. vel 10. sept. e 20. defin.

A . . . . C . . .
B . . . . . D . . .

SINT quinto A,& C,ipsis B,& D,æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A,& B, æqualium numerorum C, & D,vel eadem pars;vel eædem partes sunt; f Erit vt A,ad C,ita B, ad D. f 20. defin.

A . . . C . . . .
B . . . D . . . .

SINT sexto A, & C,ipsis B, & D,æquales,at A, maior quam C.Quia igitur æquales numeri A,& B, æqualium numerorum C, & D, vel æque multiplices sunt, vel certe illi hos

A . . . . C . . .
B . . . . D . . .

hos æqualiter continent, eandemque insuper partem, vel partes;[a] erit vt A, ad C, ita B, ad D.

a 20. defin.

SINT septimo ac vltimo A, & C, inter se æquales, siue ij maiores sint quam B, & D, siue minores, siue æquales.[b] Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes; suntq; A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, si quatuor numeri proportionales sint, & vicissim proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

b 20. defin.

A ..... C .....
B ... D ...

SCHOLIVM.

QVOD si pro numeris integris fractos numeros substituas, demonstrabis eodem modo propositionem hanc veram esse in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque est, propositionem hanc non variari, etiamsi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI vero sumus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recensere, eosque demonstrationibus certissimis confirmare, vna cum lemmate propos. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, vt perspicue ex eorundem auctorum demonstrationibus apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam est (quod miror) Federicus Commandinus præstans Geometra: quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam vel ex defin. 20. Solis luce clarius constat, vbi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam si existimaret, maiorem numerum minoris

partes

partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, vt manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis superuacanea essent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. XV.

SI sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, sitque vt A, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque esse vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita D, ad E; [a] erit vicissim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eandem ob causam, cum sit, vt B, ad C, ita E, ad F; erit viscissim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt A, ad D, ita C, ad F; (Cum enim vtraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem sit proportioni B, ad E, vt demonstratum est; & ipsæ inter se eædem erũt, vt mox ostendetur.) [b] Ac proinde viciſsim, vt A, ad C, ita D, ad F.

A	D ....
B	E ......
C	F ...
G..............	H...........

[a] 13. sep.

[b] 13. sep.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc esse vt A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autẽ vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadẽ ratione sumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, rursus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor; sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est; hanc propositionem eodem modo demonstrari posse in numeris fractis, si pro numeris integris assumantur fracti numeri.

A . D ...	IDEM verum est, si loco vnius
B . F	numeri vnitas assumatur, vel etiã
G ... F	loco plurium plures vnitates, vt in
G . G ...	hoc exemplo perspicuum est.

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorũ, quæ eidem proportioni eædem sunt inter se quo-

A .... B .... C ....
D .... E .... F ...

que sint eædem, quales sunt in demonstratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem ostẽsæ sunt proportioni B, ad E, siue numeri sint integri siue fracti, ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipsius E, & tam A, ipsius D, quam C, ipsius F, æque multiplex, vel eadem pars, vel eadẽ partes; vel certe B, ipsum E, & tam A, ipsum D, quã C, ipsum F, cõtinebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes.
20.def. a Quare numeri A, D, C, F, proportionales sũt, vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod est propositũ.

HOC idem demonstratũ fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

xvj. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum

quen-

quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum EF, æque. Dico viciſsim vnitatem A, numerũ D, & numerum BC, numerum E F, æque metiri. Diuiſo enim numero BC, in vnitates BG, GH, HC, & numero EF, in partes E I, IK; KF, ipſi D, æquales;



erit multitudo vnitatum numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, metieturque æque vnitas A, numerum D, & vnitas BG, ipſum EI, atque vnitas G H, ipſum I K, & vnitas HC, ipſum K F; atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas B G, numeri E I, quæ vnitas G H, numeri I K, & vnitas HC, numeri KF. Quare per ea, quæ ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt vnitates BG, GH, HC, ſimul numerorum EI, IK, KF, ſimul, quæ vnitas BG, numeri EI, hoc eſt, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus BC, ex vnitatibus BG, GH, HC, compoſitus numerum EF, ex numeris EI, IK, KF, compoſitum æque metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

ILLVD idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quod vnitas nõ eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum BC, æque metitur, atque numerus D, numerũ E F, erit vnitas A, eadem pars numeri BC, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtrauimus, erit viciſsim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus BC, numeri EF; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus BC, numerum EF, æque metietur.

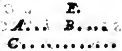
E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque est D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lẽmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.

E.
A, $\frac{2}{3}$. B, $4\frac{5}{7}$.
D, $3\frac{1}{7}$. C, $3\frac{1}{7}$.

POTEST *hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.*

SI duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemq. numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eũdem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, si numerus B, ipsum A, multiplicet, etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur. Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipsum numerus A, æque metitur, atque vnitas E, ipsum B. a 15. def.



QVOD si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel vnus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatẽ. At si B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

SI numerus duos numeros multipli-

cans fecerit aliquos ; Geniti ex ipsis eand rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C faciat D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita D, ad E. Assumpta

a15.defin. enim vnitate F, a erit D, ex B, compositus toties, quoties vnitas F, est in A: similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem vnitas F, est in eodem A: Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E, æque metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars

F .
A . . .
B . . . C . . . .
D ...... E ....

b20.defin. erit, b Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, c & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat.

c13.sept.

SCHOLIVM.

SI numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quàm E ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propos. 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E ita B, ad C. Quod est propositum.

xix. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cum

d16.sep. enim ex A, in C, fiat D, d fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademque ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C,

A . . . . B . . . . . .
C . . .
D .... E ....

e17 sep. multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; e erit, vt A, ad B,

ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

LIQVIDO constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

HANC autem propositionem, & precedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non; hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati B, C, D, habent: hoc est, esse, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G.

A . . . .
B . . C . . . D . . . .
E ...... F .... G ....

Nam cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F, erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris. a 17. vel 18. sept.

THEOR. 17. PROPOS. 19. xix.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & quarto fit, numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo, &

tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, ſecundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G, ex A, in C, Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; [a] erit, vt C, ad D, hoc eſt, vt A, ad B, ita G, ad E. Rurſus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [b] erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propoſ. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex iis, quæ ad defin. 20. ſcripſimus.

[a] 17. ſep.
[b] 18. ſep.

A . . .
B . .
C . . . . . .
D . . . .
E . . . .
F . . . .
G . . . .

SED iam ſit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipſi F, producto ex B, ſecundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales eſſe, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipſi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem vt ad defin. 20. docuimus. Rurſus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [d] erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædem ſint proportioni G, ad F, eædem inter ſe erunt, per lemma propoſ. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 17. ſep.
[d] 18. ſep.

S C H O L I V M.

LVCE clarius eſt, eandem demonſtrationem huius propoſ. locum habere in numeris fractis, ſiue omnes fracti ſint, ſiue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hũc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentẽ horum,& consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

ITA enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, consequentem æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

SED & sequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propos. 16. demonstrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D; quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, esse maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam si intelligatur esse E, ad B, vt C, ad D; (siue E, numerus integer sit, siue fractus; siue integer cũ fracto: qui quidẽ reperietur, vt ad propos. 19. lib. 9. ostẽdemus, si numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quã E, ad B: ac proinde A, maior erit, quã E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quã ex E, in eundẽ D: a At qui fit ex E, in D, æqualis est ei, qui fit ex B, a 19. sep.

A....... E......
B....
C........
D.....

in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus, Quod est propositum.

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem esse A, primi ad B, secundũ, quam C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (siue E, numerus sit integer, siue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quàm E. Quare maior

a19.sep. *erit proportio A, ad B, quam E, ad B:[a] At ita est E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod est propositum.*

QVOD si minor fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad secundum, quã tertij ad quartum. Eadẽ enim omnino demonstratio erit, si modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris: Vt in hoc apposito exemplo apparet.

A	E . . . . . .
B	
C . . .	
D . .	

Quod tamen ita etiam ostendi potest. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D: hoc est, maior est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, siue ex B, in C, quã ex D, secundo in A, tertium, siue ex A, in D, vt demonstratum iam est: hoc est, minor numerus fiet ex A, in D, quam ex B, in C, quod est propositum. Deinde si minor numerus fiat ex A, in D, quam ex B, in C; hoc est, maior ex B, in C, siue ex C, in B, quam ex A, in D, siue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, secundum, quam A, tertij ad B, quartum, vt iam est demonstratum: hoc est, minor proportio erit A, ad B, quam C, ad D. Quod est propositum.

xx. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint,

qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui a medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio describitur: ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, ut quidē A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit ut B, ad C, hoc est, ut A, ad B, ita D, ad C; numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur. a 19. sep.

A..........
B......D......
C....

SED iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat. 16. sep.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hæc non variabitur, etiamsi numeri A, B, C, sint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD si maior fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Et si maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se: maior erit proportio primi ad secūdum, quam secundi ad tertiū. Itē si mi-

A	A . . . .
B . . . . . . D	B . . . . D . . . . . .
C	C . . . .

nor fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Et si minor numerus fiat ex primo in tertiũ, quam ex secundo in se; minor proportio erit primi ad secundum, quam secundi ad tertium. Id quod ex scholio antecedentis propos. liquet, si secundo numero sumatur alius aequalis, vt habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

xxj. THEOR. 19. PROPOS. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur aeque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem.

SINT numeri AB, CD, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt sit, quemadmodum AB, ad CD, ita E, ad F. Dico AB, CD, aeque metiri ipsos E, F; maiorem quidem AB, ipsum maiorem E, at minorem CD, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedẽtem, & consequentem, ipsum consequentem.

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . .
F . . . . . .

Cum enim sit, vt AB, ad CD, ita E, ad F; [a] erit viciſſim, vt AB, ad E, ita CD, ad F, Atque adeo cum AB, CD, minores sint, quam E, F; [b] erit AB, ipsius E, & CD, ipsius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquã: Diuisis namque, si fieri potest, AB, CD, in partes AG, GB; CH, HD, numerorum E, F; erit multitudo partium AG, GB, aequalis multitudini partium CH,

a 13. sep.

b 20. defin.

HD; Ac propterea A G, ipsius E,& C H, ipsius F,eadem pars.[a] Erit ergo,vt AG,ad E,ita CH,ad F; [b] & vicissim, vt AG,ad CH,ita E,ad F,vel AB,ad CD; Ac proinde numeri AG,CH,minores quam AB,CD,eandem,habebunt proportionem,quam AB,CD. Quod est absurdum; cum AB,CD, in sua proportione ponantur minimi. Non ergo AB,ipsius E,& CD,ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea AB,ipsum E,& CD,ipsum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

a 20. def.
b 13. sep.

S C H O L I V M.

IDEM hoc verum est,si quis dicat,tres numeros esse cōtinue proportionales,primosque duos esse in sua proportione minimos. Hoc enim posito,ostendetur eodem modo, primum metiri secundum,& secundum, tertium, vt in hoc apposito exēplo apparet, vbi tertius numerus secundo æqualis est. Quamuis autem dari non possint tres numeri cōtinue proportionales, quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas;idem tamē demonstratur in tribus, etiamsi primus ab aduersario non dicatur esse vnitas,vt diximus. Quod idcirco dixerim,vt propositio 12.lib.9.demonstrari possit, in qua aduersarius cogitur cōcedere,tres numeros esse continue proportionales, primosque duos esse in sua proportione minimos,ac proinde primū metiri secundum,ex hac propos.quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propos.12.lib.9.

A .. G.. B
C ... H ... D
E ......
F ....

PARI ratione,& hoc verum est,quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædē sint,siue diuersæ proportiones, metiūtur æque totidem alios numeros, qui easdem cū eis proportiones habent,primus primum, secundus secundum, tertius tertium,&c.

SINT enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit

A... K... B C.. L. D E..... M.... F
G............ H...... I...............

proportio AB, ad CD, quæ CD, ad EF, siue non; ita vt non possint reperiri alij numeri ipsis AB, CD, EF, minores, quorum primus ad secundum sit, vt AB, ad CD, & secũdus ad tertium, vt CD, ad EF, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio AB, ad CD, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis AB, CD, quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cum in minoribus numeris non possint continuari, reperiuntur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25. in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt AB, ad CD, & H, ad I, vt CD, ad EF. Dico AB, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsum I, metiri æque. Cum enim sit vt AB, ad CD, ita G, ad H, [a] erit vicissim vt AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum sit vt CD, ad EF, ita H, ad I, [b] erit quoque vicissim, vt CD, ad H, ita EF, ad I. [c] Quare AB, ipsius G, & CD, ipsius H, & EF, ipsius I, erit vel eadem pars, vel eadẽ partes. Partes quidẽ nequaquã. Diuisis enim, si fieri põt, AB, CD, EF, in AK, KB; CL, LD; EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AB, quot in CD, & in EF, atque adeo AK, ipsius G, & CL, ipsius H, eadem pars. [d] Erit ergo vt AK, ad G, ita CL, ad H; [e] & vicissim vt AK, ad CL, ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, vt CL. ad FN, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL, EM, in proportionibus numerorum AB, CD, EF, & minores quam AB, CD, EF. Quod est absurdum, cum hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Nõ ergo AB, CD, EF, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea AB, ipsum

[a] 13. sep.
[b] 13. sep.
[c] 20. def.
[d] 20. def
[e] 13. sep.

ſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſũ I, æque metietur. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi tres numeri dati A, B, C, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, ita vt etiam quilibet duo minimi ſint facilius idem hoc modo demõſtrabitur. Sint alij tres D, E, F, nõ minimi, qui eaſdem habeãt proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipſos D, E, F, æque metiri. Nam per hãc propoſ. 21. A, B, cum ſint minimi in proportione A, ad B, æque metientur ipſos D, E; eademque ratione B, C, ipſos E, F. Quare cum A, ipſum D, & C, ipſum F, æque metiatur, ac B, ipſum E, metientur æque omnes A, B, C, ipſos D, E, F.

A ..	B	C ...
D	E	F .....

CAETERVM hæc propoſitio cum ſuo ſcholio nullo modo conuenire poteſt numeris fractis: Propterea quod in numeris fractis dari non poſſunt minimi numeri in ſua proportione, ſed quibuſuis datis, dari poſſunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligẽdum eſt in omnibus alijs propoſitionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Eæ enim omnes de numeris tantum integris ſunt intelligendæ. Sic etiam quando de numeris inter ſe primis agitur, excludendi ſunt numeri fracti, cum hi non poſſint eſſe inter ſe primi, ſed quoſcunque metiri poſſit aliqua fractio, tanquam menſura communis. Nam ſi reducantur ad eandem denominationem, perſpicuum eſt, eos habere vnam particulam, vel plures, eiuſdem denominationis, menſuram communem. Aliæ autem omnes propoſitiones numerorum, in quibus minimi numeri in ſua proportione, vel primi non adhibentur, æque conueniunt & integris numeris, & fractis. quod ſatis eſt, ſemel hoc loco monuiſſe.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xix.

SI fuerint tres numeri: & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem pertubata

eorum

eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A,B,C,& totidem D,E,F, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, ſitque perturbata eorum proportio,vt quidem A,ad B,ita E,ad F;& vt B,ad C, ita D,ad E.Dico,ex æqualitate quoque eſſe vt A,ad C,ita D, ad F.Cũ enim ſit vt A,ad B,ita E, ad F; a erit numerus ex A,in F,genitus æqualis numero,qui fit ex B,in E.Pari ratione,cum ſit etiam vt B, ad C, ita D,ad E,b erit eidem numero,qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D, Atque adeo numerus genitus ex A,primo in F,quartum æqualis erit numero ex C,ſecundo in D,tertium,producto.c Quare erit vt A,ad C,ita D, ad F.

a19. ſep. b19. ſep. c19. ſep.

A	H ...
B ...	D ....
C......	E........
G........	F . .

QVOD ſi fuerint plures numeri,quam tres,ita vt ſit etiam C,ad G,vt H,ad D;Dico adhuc eſſe,vt A,ad G, ita H,ad F.Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris,eſſe vt A,ad C,ita D,ad F;ponatur autem vt C, ad G, ita H,ad D;erunt tres numeri A,C,G,& alij tres H,D,F,qui bini in eadem ratione ſumuntur, eſtq. eorum proportio perturbata.Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa,erit rurſus,vt A,ad G,ita H,ad F.Eodemque modo idē oſtendemus in quinque numeris, per quatuor, ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi fuerint tres numeri, & alii ipſis multitudine æquales,qui bini ſumantur,&c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonſtrabitur propoſitio in numeris fractis,vt conſtat.

QVONIAM vero Euclides ex illis ſex modis argumentandi in proportionibus,quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit,& demonſtrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris oſtendit, nimirum eum, qui à permu-

tata

tata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æquali tate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum a nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quadam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris quam integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C.

Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, a erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B, ad D, vt A, ad C, b erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.

A ..,... C ...
B . . . . D ..

a 13. sep.
b 13. sep.

I I.

S I cõpositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.

S I T vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico diuidendo esse vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; c erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatũ F E: Ac proinde, vt totus A B, ad totum D E, d ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, vt CB, ad FE. e Vicissim ergo erit quoque AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod est propositum.

A ...... C... B
D . . . . F . . E

c 13. sep.
d 11. sep.
e 13. sep.

EADEM ratione demonstrabimus Diuisionem rationis conuersam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuisionem rationis cõuersam esse quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cũ enim sit, vt A B, ad CB, ita D E, ad E E; erit quoque diuiden-

do, vt

do, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuisionem rationis contrariam, esse quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit cõuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, ut CB, ad AC, ita FE, ad DF; Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

III.

SI diuisi nnmeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

SIT ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; [a] *erit vicissim, vt*

a13. sep.
b12. sep.
c13. sep.

A . . . . . . B . . . C
D . . . . E . . F

AB, ad DE, ita BC, ad EF; [b] *Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, vt BC, ad EF:* [c] *Et vicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, vt DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.*

SIMILITER Compositio rationis conuersa, & contraria ostendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam esse quoque, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo vt BC, ad AB, ita FE, ad DE: Et componendo vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.

DEINDE sit rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo ergo, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et conuertendo, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum

IIII.

SI compositi numeri proportionales sint:

Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; a erit viciſſim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE; b Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF. c Viciſsim igitur vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum. a13. ſept b11. ſept c13. ſept

A ..... C ... B
D .... F ,, E

RVRSVS ex his facile demonſtrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus oſtendit Euclides propoſ. 24. lib. 5. Videlicet,

V.

Si primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſextus ad quartum: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quã tertius cum ſexto ad quartum.

SIT vt AB, primus ad C, ſecundum, ita DE, tertius ad F, quartum; Item vt BG, quintus ad C, ſecundum, ita EH, ſextus ad F, quartum. Dico ita eſſe AG, compoſitum ex primo & quinto, ad C, ſecundum, vt eſt DH, compoſitus ex tertio & ſexto, ad F, quartum. Cum enim ſit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur eſt, vt AB, ad C, ita DE, ad F: & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex æqualitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaque cum rurſus ſit, vt

A ..... B .. G | D .... E ... H
C . . . . | F .....

AG, ad BG, ita DH, ad EH, & vt BG, ad C, ita EH, ad F erit ex æqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod est propositum.

EODEM modo & hoc Theorema ostendemus, quod ad propos. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonstrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, esse ad C, vt est reliquus HE, ad F. Cum enim sit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH.

A ..... G .. B · D .... H ... E

C ....   F ......

Quia igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH: erit ex æqualitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaq. cum rursus sit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F: erit ex æqualitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod est propositum.

ITEM & hoc demonstrabimus.

VII.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eãdem, quã tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eãdem rationem habebit, quã tertius ad quartum cum sexto.

SIT vt primus A, ad ſecundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad ſextum FH. Dico ita eſſe A, primum ad BG, compoſitum ex ſecundo & quinto, vt eſt D, tertius ad EH, compoſitum ex quarto & ſexto. Cũ enim ſit, vt A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo vt BC, ad A, ita EF, ad D.

A ...... D ....
B.... C.. G E ...... F.... H

Quia igitur eſt vt BC, ad A, ita EF, ad D: & vt A, ad CG, ita D, ad FH: erit ex æqualitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH: & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo eſt, vt A, ad CG, ita D, ad FH: & vt CG, ad BG, ita FH, ad EH: erit ex æqualitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod eſt propoſitum.

DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoque illi omnes ſimul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul.

HABEANT quotcunque numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones, quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K; Hoc eſt, ſit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt

BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul habent, hoc est, quam ipse FI, habet ad K. Cum enim sit, vt AB, primus ad E, secundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E, secundum, ita GH, sextus ad K, quartum; erit quoque vt AC, primus cum quinto, ad E, secundum,

A . . . . B . . . . . C . . . . . . D | F . . G . . . H I
E . . . . | K . . . . .

ita FH, tertius cum sexto, ad K, quartum. Rursus quia est, vt AC, primus ad E, secundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E, secundum, ita HI, sextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, secundum, ita FI, tertius cum sexto, ad K, quartum: Atque ita de cæteris, si plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque AB, BC, CD. proportiones easdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc est, sit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico esse, vt E, ad omnes illos simul, nimirum ad AD, ita K, ad hos omnes simul, videlicet ad FI. Cum enim sit, vt E, primus ad AB, secundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, sextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum sexto. Rursus quia est, vt E, primus ad AC, secundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, sextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartũ cum sexto. Atque ita de reliquis, si plures fuerint.

IAM vero his demonstratis, ostendentur nouem vltimæ propositiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonstratæ fuere: si pro magnitudinibus, intelligantur numeri siue integri, siue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. sunt demonstrati, assumantur

ijdem modi hoc lib. demonstrati: vt opus non sit eas hic repetere. Satis enim est, vt dixi, si propositiones illa quinti lib. in manus sumantur, & magnitudines intelligantur esse numeri, eademq. prorsus demonstrationes adhibeantur.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxj.

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A,B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quã ipsi A,& B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A,&B Sint ergo, si fieri potest, C,D, minimi in proportione A,& B, minoresque idcirco ipsis A,& B Quoniam igitur C, D, minimi sunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æque; atque adeo secundum eundem numerum, qui sit E, ita vt C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties vnitas est in E. Itaque cum vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur; [b] metietur & vicissim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur: [c] metietur quoque vicissim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B: Atque adeo, cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum comunis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

A	B	
C -----	D - -	
	E ---	

a 21. sept.

b 15. sept.

c 15. sept.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

xxij. MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerum, præter vnitatem, cõmuni mensura eos metiri. Si.n. non sunt inter se primi, sed habent numerum communẽ mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas est in numero D: At vero ipsum B, toties, quoties vnitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt vnitates, procreat ipsum A; & idem C, toties cõ-

A........ B .....
C -----
D ----- E ----

a 9. prō. positus, quot sunt vnitates in E, producit ipsum B: a fit, vt D. & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B.
b 18. sept. b Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E: Atque adeo, cum D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quam A, & B: non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

HANC propositionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in conti-

continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.

SINT quotcunque numeri inter se primi A, B, C. Dico eos minimos esse in cõtinuatione suarum proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari non possint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarũ proportionũ. Quia igitur D, E, F, minimi sunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, æque, per ea, quæ ad propos. 21. huius lib. demonstrauimus: atque adeo secundum vnũ eundem numerum, qui sit G: ita vt D, toties metiatur ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, quoties vnitas est in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipsum A, æque metitur: a metietur quoque vicissim æque vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademq. ratione idem G, metietur & ipsum B, & ipsum C, æque, atque vnitas ipsos E, F: Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem mensuram, non erunt inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non sunt igitur alij numeri minores ipsis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: sed ipsi A, B, C, minimi sunt.

A...... B........ C......
D---- E------ F---
G-----

a 15. sept.

IAM vero sint A, B, C, in continuatione suarum proportionum minimi. Dico eos primos esse inter se. Si. n. non sunt inter se primi, metiatur eos communi mensura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipsum A, quoties vnitas est in D: & ipsum B, toties, quoties vnitas est in E: & ipsum C, toties quoties vnitas est in F. Quoniam igitur G, toties compositus facit numeros A, B, C, quoties vnitas est in D, E, F: sit vt D, E, F, ipsum G, multiplicantes producant ipsos A, B, C. Quare D, E, F, easdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus: Atque adeo, cum D, E, F, minores sint quam A, B, C: non erunt A, B, C,

minimi in continuatione suarũ proportionũ. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A,B,C. Quod est propositum.

xxiiij. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter se fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B: & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primũ. Si enim non sunt inter se primi B, & C: metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D.

A...... B .....
C.. , D ----

Quoniam igitur D, metitur C: & C, ipsum A; [a] metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cum habeant mensuram communem numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] *11. prõ*

xxv. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi: sit eorum communis mensura numerus E, metiens ipsum D, toties, quot vnitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D, quot sunt vnitates in F; [b] fit vt F, ipsũ E, multiplicãs gignat ipsum D: [c] & contra E, ipsũ F, multiplicans producat eundem D. Genitus est autẽ idẽ

A....... B ...
C.......
D.....................
E ---- F ----

[b] *9. prõ.*
[c] *16. sep.*

D, ex

D,ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus,qui ex A, secundo in B,tertium ; [a] erit vt E,primus ad A, secundum,ita B,tertius ad F,quartum. Quia vero A,& C,primi inter se sunt;& E,ipsum C, ponitur metiri;[b] erit E,ad A,primus; Atque adeo E,& A,cũ sint inter se primi, [c] in sua proportione minimi erunt. [d] Aeque igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habẽtes,nimirum E,ipsum B,& A,ipsum F.Quare cum E,metiatur vtrumque B,& C; non erunt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim.Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

a 19. sep.
b 25. sep.
c 23. sep.
d 21. sep.

THEOR. 25. PROPOS. 27. xxvj.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A,& B,gignaturque C, ex A,in se ipsum.Dico C,ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D,æquali ipsi A,erit & D,ad B,primus.Quoniã igitur A,& D,ad B, primi sunt, [e] erit numerus ex A, in D, hoc est,ex A,in se genitus,nimirum C,ad eundem B,primus.Eademque arte ostendemus,numerum ex B,in se genitum,ad A,primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.... B.....
C...............
D....

e 26. sep

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxvij.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT vterque A,& B,ad vtrumque C,& D, primus,gignaturque E,ex A,in B;& F,ex C,in D. Dico E, & F, in-

ter se primos esse. Cum enim vterque A, & B, primus sit
a 26. sep ad C;[a] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, pri-
mus. Rursus cũ vterque A, & B,
A . . . . B . . ad D, sit primus, erit eodẽ mo-
E . . . . do E, ex ipsis genitus, ad eundẽ
C . . . D . . D, primus. Quia igitur vterque
b 26. sep F . . . . C, & D, primus est ad E;[b] erit
quoque F, ex illis procreatus,
Ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vter
que ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum.

xxviij. **THEOR. 27. PROPOS. 29.**

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erũt: Et si, quí in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cum enim A, B, sint inter se primi,[c] erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus: atque adeo geniti duo C, D, primi inter se erunt.

A . . .	B . .
C	D . . . . . .
E	F . . . .
G, 81.	H, 16.
I, 243.	K, 32.

c 27. sep

d 27. sep RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi,[d] erit & C, factus ex A, in se, ad B: & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igi-
e 28. sep tur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit;[e] Ac proinde E,

factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B, in F, fiat H, cum A, & C, primi sint ad B, [a] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus est; [b] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, [c] erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus: necnon & H, ad A. [d] Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

a 26. sep
b 28. sep
c 26. sep.
d 28. sep

THEOR. 28. PROPOS. 30.

xxix.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si vterque simul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi AB, BC. Dico & vtrumque simul AC, primum esse & ad AB, & ad BC. Si enim AC, AB, nõ sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totũ AC, & ablatum AB; [e] metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt AB, BC, cum eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare AC, ad AB, primus erit. Eodemque modo ad BC, ostendemus eundem esse primum.

e 12. pro.

A . . . . B C
D - - - -

SED iam vterque AB, BC, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, B C, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur AB, & BC; [f] metietur quoque D, numerum AC,

f 10. pro.

ex AB,BC,compoſitum: Ac proinde AC,AB, nõ ſunt inter ſe primi,cum eos numerus D,metiatur. Quod eſt abſurdum,& contra hypotheſim. Sunt igitur AB, BC, inter ſe primi. Eodemque argumento oſtendemus AB, BC,inter ſe primos eſſe,ſi AC,ad BC, primus eſſe ponatur. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad vnũ illorum primus eſt, ad reliquum quoque primum eſſe. Si enim AC, ad AB,primus eſt,erunt AB, BC, inter ſe primi, per ſecundam partem huius propoſ. Igitur & AC,ad BC,primus erit: per primam partem eiuſdem. Quod eſt propoſitum.

xxxij. THEOR. 29. PROPOS. 31.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A,ad B,primum eſſe; hoc eſt, A,& B, eſſe inter ſe primos, licet B,compoſitus ſit. Si enim A, & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos præter vnitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quòd

A..... B........
C ----

A,ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C,metitur, non erit A, primus. Quod eſt abſurdum,& contra hypotheſim. Primus igitur eſt A, ad B; Ac propterea,omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

xxxiij. THEOR. 30. PROPOS. 32.

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus. is etiã vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem vnum ipsorum A, & B, si nō vtrumque metitur. Nō metiatur enim D, ipsum A; metiatur vero ipsum C, toties, quot sunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad E, quartū. [b] Quia vero primus D, ad A, primus est, cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A, in sua proportione minimi. [d] Quare æque metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A, metietur saltem ipsum B: Eodemque modo si D, non metiatur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonstrandum.

A .... B ......
C ....
D ... E ....

a 19. sep
b 31. sep.
c 23. sep
d 21. sep

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema sequēs demōstrabimus.

SI duo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certe compositus ad eum sit; hoc est, vel D, & C, cōpositi sint inter se. Dico D, quoque ad vnum ipsorum A, B, compositū esse: id est, vel D, & A; vel D, & B, esse quoque inter se compositos. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit vterq; A, et B, ad D, primus. [e] Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, pri-

A ... B ....
C ....
D ....

e 26. sep

mus erit. Quod est absurdum, cum D, ponatur vel metiri ipsum G, vel certe ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, vel ad B, cum non sit primus ad vtrumque.

xxx. PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compositus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si vero compositus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compositus: Si primus, cũ metiatur ipsum B; & B, ipsum A; [a] metietur quoque C, primus ipsum A. Si autẽ C, compositus fuerit, metietur eũ alius numerus. Quia vero numerus nõ diminuitur infinite, veniemus tandẽ ad aliquẽ numerũ, quẽ nullus alius metiatur, atque adeo ad primum, qui cum metiatur omnes præcedentes, [b] metietur quoque compositum A. Quod est propositum.

a 11. pro.

A ....

B ...... C ...

b 11. pro.

ALITER. Quia numerus A, compositus est, metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B, quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A, [c] metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

A ....

B ... C ---

c 11. pro.

xxxj. THEOR. 32. PROPOS. 34.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel esse primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum. n. omnis numerus vel primus sit, vel cõpositus; si quidẽ A, primus est, habetur propositum:

A ....

positum: Si vero compositus; a metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum. a33.sep.

PROBL. 3. PROPOS. 35. xxxiiij

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quascunque proportiones, siue eadem sit proportio A, ad B, quæ B, ad C, siue non; oporteatque totidem reperire, qui in eisdem proportionibus sint minimi. Quoniã A, B, C, sunt inter se aut primi, aut cõpositi: Si primi inter se sunt; erunt ipsi

A......	B....	C........
	D..	
E...	F..	G....
H----	I----	K----
	L----	

in continuatione suarum proportionum minimi, per ea quæ ad propos. 34. huius lib. demonstrauimus. Si vero nõ sunt inter se primi, b inuenta sit maxima eorum communis mensura numerus D, qui metiatur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos esse in proportionibus numerorum A, B, C. Quod enim easdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, sic ostendetur. Quoniam D, ipsos A, B, C, metitur per E, F, G; c fit, vt D, ipsos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus, easdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C. b3.sept. c9.pron

QVOD vero E, F, G, sint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sunt minimi, erunt aliqui alij ipsis minores, minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi H, I, K; qui quoniam ipsos A, B, C, metiuntur æque, vt ad propos. 21. huius lib. ostendimus; metiantur eos per numerũ L. Quo posito, d fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K; producat numeros A, B, C; e & vicissim L, ipsos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, d9.pron e8.pron

primus multiplicans D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, tertium facit eundem A; a erit, vt E, primus ad H, secundum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, maior quam H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipsos A, B, C, metiatur, non erit D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur erũt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in cõtinuatione proportionũ A, ad B, & B, ad C, sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.

a 19. sep.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum, metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A ad B, & B, ad C. Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

EX his facili via cõperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionẽ, quã quotcunque numeri dati continue proportionales. Vt si proponãtur continue proportionales A, B, C, D, E, siue illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, siue non, reperiemus

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

duos in eadẽ proportione minimos, si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

CAETERVM contingit interdum, vnum numerorum

A . . . B . . . . . . C	*A . . . . B . . C . . . . . .*
D . . .	*D . .*
E. F . . G . . .	*E . . F. G . . .*

E, F, G, per hanc propos. inuentorum esse vnitatem; quando scilicet D, maxima mensura vni ipsorũ A, B, C, æqualis est, vt ex his exemplis apparet. Manifestum est autem, tunc in-

uentos E,F,G,esse minimos in continuatione suarum proportionum,cum minor numerus dari non possit, quam vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. xxxvj.

DVOBVS numeris datis,reperire,quem illi minimum metiantur,numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium,quos dati numeri A,& B,metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B,inter se primi,seseque mutuo multiplicantes faciãt C. Dico C,esse minimum,quem A,& B,metiuntur. Quod enim eum metiantur,perspicuum est. Nam cum producatur C,ex A,in B,vel ex B,in A;a metietur A,ipsum C,per B;& B, eundẽ C, per A. Vterque igitur A, & B, ipsum C, metitur. Quod autem C, sit minimus omnium,quos A, & B,metiuntur,sic demonstrabimus. Si C, non est minimus; metiãtur,si fieri potest,A,& B,alium numerum D,ipso C, minorem; metiaturque A,ipsum D,per E,at B,eundem D,per F. Quo posito, b tam ex A,in E, quã ex B,in F,& e contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, secundo in F,tertium,c erit,vt A,primus ad B,secundum, ita F,tertius ad E,quartum. Igitur A,& B,(cum ponantur primi inter se, d & ob id, in sua proportione minimi) e eque metientur ipsos F,& E;nimirum A,ipsum F, & B, ipsum E. Quoniam vero A,multiplicans B, & E,facit C, & D;f erit C,ad D,vt B,ad ad E: Ac propterea cum B,metiatur ipsum E, vt ostensum est;metietur & C, numerus numerũ D,maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A,& B, metientur alium numerum minorem ipso C, atque adeo C,minimus est omnium,quos metiuntur.

A .... B ....
C ....
D-------------------
E ------- F ----

a 7.pro.
b 9. pro.
c 19.sep.
d 23.sep
e 21.sep.
f 17.sep.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter se.g Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportio- g 35.sep.

ne, vt sint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo posito, [a] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, secundo in C, tertium. Factus ergo sit E. Dico E, hac via procreatum esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifestum est. Nam cum tam A, multiplicatus à D, quam B, multiplicatus à C, ipsum E, producat; [b] metietur tam A, quam B, ipsum E. Quod vero E, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, nõ est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum F, ipso E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo posito, [c] fiet F, tam ex A, in G, quã ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, secundo, in H, tertiũ, [d] erit, vt A, primus ad B, secundũ, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum sint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G, [e] metientur ipsos H, & G, æque, nimirum C, ipsum H, & D, ipsum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E, & F, [f] erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipsum G, vt ostẽsum est, metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorẽ, atque adeo E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

A .... B ......
C .. D ...
E ....
F -- --------.---
G - --- H ----

a 19. sep.
b 7. prõ.
c 9. pron
d 19. sep.
e 21. sep.
f 17. sep.

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationẽ habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, esse minimũ, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi, Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. xxxv.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD. sitque alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum CD, metiri. Si enim E, ipsum CD, non metitur, ablato E, ex CD, quoties pōt auferri, relinquetur numerus quidam minor, quā E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties potest, numerum, si fieri potest, FD, minorem se, ita vt E, metiatur ablatum CF. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur, & E, ipsum CF; [a] metietur quoque tam A, quam B, ipsum CF. Itaque A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; [b] metientur & reliquum FD. Est autem FD, minor quam E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare E, ipsum CD, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . B . . .
C . . . . F ----- D
E . . . . . .

a 11. pro.
b 12. pro.

PROBL. 5. PROPOS. 38. xxxvj.

TRIBVS numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. [c] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B, metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipsum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipsū D, metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quē A, & B, metiuntur, minimū quo-

A . . . B . . . . C . . . . . .
D . . . .
E -----------

c 36. sep.

que esse, quem tres A,B,C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A,B, C, alium numerũ E, ipso D, minorem. Quoniam igitur A,& B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D. minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo, cum A,& B, metiantur ipsum E; & D, sit minimus, quem iidem A, & B, metiuntur; [a] metietur quoque D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum.

a 32. sep.

SED iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. [b] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur. Cũ A,& B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; [c] metientur quoque A,& B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E, Igitur omnes tres A, B,C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A,B,C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniã igitur A,& B, ipsum F, metiuntur; [d] metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A,& B, metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C,& D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo cũ C,& D, metiantur ipsum F; [e] metietur quoque eũdem F, numerus E, minimus, quem metiuntur iidem C, & D, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A,B,C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

b 36. sep.

A.. B... C ......

D.....

E...............

F- ------

c 11. pro.

d 37. sep.

e 37. sep.

C O R O L L A R I V M.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A,B,C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum, quem A,B,C, metiũtur, eundem F, metiri.

SCHO-

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum DE, sitque F, minimus, quem iidem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum DE, metiri. Si enim nō metitur, metiantur eius partem D G, relinquatque numerum G E, se minorem.

A.. B... C....
D.................G---E
F...........

Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur; & F, ipsum DG, a metientur quoque A, B, C, eundem DG; Ac proinde, cum & totum DE, ponantur metiri; b metientur & reliquum GE, ipso F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Metitur igitur F, ipsum DE. a 11. pro. b 12. pro.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

THEOR. 34. PROPOS. 39. xxxvij.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur partem habebit a metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot vnitates sunt in numero C. Quia igitur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æque metitur; c & vicissim vnitas æque ipsum B, & C, ipsum A, metietur: atq; adeo eadē c 15. sep

A.............
B.... C...

pars erit vnitas ipſius B, quæ C, ipſius A: Eſt autē vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius A, ab eodē B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.

xxxviij ## THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nam cum B, pars denominetur à C, ſit autem & vnitas pars ipſius C, ab eodem C, denominata; metietur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æque.[a] Viciſſim ergo & vnitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . .
B . . .   C . . . . .

a 15. ſep.

xxxix. ## PROBL. 6. PROPOS. 41.

NVMERVM reperire, qui minimus cū ſit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C, Inuenienduſque ſit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, ſiue qui ipſas denominent, D, E, F;[b] minimuſque, quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, eſſe minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiuſmodi partes habeat, ita oſtendetur. Cum D, E, F, ipſum G; metiantur,[c] habebit G, partes à D, E, F, denominatas, hoc eſt, partes A, B, C, cum hę denominentur a D, E, F. Quod vero G, ſit

D . .   A, *Secunda*
E . . .   B, *Tertia*
F . . . .   C, *Quarta*
G . . . .
H . . . .

b 38. ſep.
c 39. ſep.

minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim nõ est minimus, habeat, si fieri potest, H, ipso G, minor easdẽ partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, [a] metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat. a 40. sep.

SCHOLIVM.

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipsius G, denominatæ scilicet à D, E, F. Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metietur æque vnitas ipsos I, K, L, & numeri D, E, F, ipsum G. [b] *Vicissim ergo metietur quoque vnitas ipsos D, E, F, & numeri I, K, L, ipsum G, æque, atque adeo vnitas ipsorũ D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo vnitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominatæ à D, E, F.* b 15. sep.

A,	Secunda	D ..	I ......
B,	Tertia	E ...	K ....
C,	Quarta	F	L ...
		G	

EX his autem sequitur, minimũ numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, à metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM vero, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F,

ſit illius duplus, numerus H; triplus vero I, &c. Dico H, eſſe ſecundum numerum, qui eaſdem partes A, B, C, a numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens eaſdem partes, ſed ipſi ſoli H, I, & cæteri multiplices ipſius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas ſcilicet a D, E, F, ita oſtendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipſum G, per

G. . . . . A, D . .
H. . . . . B, E . . .
I. . . . . C, F . . . .
K ------------------ M ------ L
N --------------------------------------- P ------O

a11.pro *conſtructionem; & G, ipſos H, I, & reliquos multiplices ipſius G; ª metientur quoque D, E, F, eoſdem H, I, & reliquos*
b39.ſep *multiplices ipſius G. ᵇ Quare H, I, & reliqui numeri ipſius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.*

QVOD autem H, duplus ipſius G, minimi, ſit ſecundus eas partes habens, hoc modo demonſtrabimus. Si H, non eſt ſecundus, ſit, ſi fieri poteſt, alius KL, ipſo prior, qui nimirum maior ſit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipſius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipſo
a40.ſep. *G, minor. Quoniam igitur KL, partes habet A, B, C; ᶜ metietur ipſum numeri D, E, F, a partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propoſ. 38. huius lib. eundem KL: Metitur au-*
d12.pro. *tem & G, ablatum KM, ſibi æqualem. ᵈ Igitur & reliquum ML, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H; cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, ſecundus eſt huiuſmodi partes habens.*

NON aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, videlicet NO, ipſo prior, qui vide-

licet maior sit, quàm H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur NO, partes habet A, B, C, [a] metientur ipsum numeri D, E, F, a partibus illis denominati. a 40. sep.
Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem NO, per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo æqualem. [b] Igitur & reliquum PO, idem G, metietur, minorem maior. b 12. pro
Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, eadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, tertius est illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

HVC quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT data partes A, B, C; inueniendusque sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, cõtineat partem B, & pars B, partẽ C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatque G. ex E, in F: Itẽ H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerũ, qui quæritur.

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D . . E . . . F . . . .
G . . . .
H . . . .
. Vnitas
I ------------------------
K -----------
L ----------
M ---

Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Nam cum ex D, in G, fiat H, erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Est autem vnitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nimirum

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D . . E . . . F . . . .
G . . . .
H . . . .
. Vnitas
I ------------------------------
K ------------
L ------------
M ---

numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G: erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, a numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata, & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; [a] Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipsos G, & K, multiplicans faciat H, & I; [b] erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoque erit numero M, pars toto. Quod est absurdum.

[a] 15. def.
[b] 17. sep.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

Non

Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositum.

SI vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorsus est via tenenda ac demonstratio. Vt si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem a 2. denominatam; & hac aliam à 3. & hac aliam à 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem a 6. denominatam, vt manifestum est.

QVOD si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet secundum, tertium, quartum, &c. qui easdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eademque est ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

j. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentiũ.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omnium eandem cum eis proportionem habentiũ. Si enim non sunt minimi, erunt alij ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E, F, G, H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunque numeri sunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bi

A	E ---
B	F -----
C	G ------
D	H ---------

ni sumuntur, & in eadẽ rõne,[a] erit, ex æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H:[b] Sunt autem A, & D, in sua proportione minimi, quod inter se primi esse ponantur. [c] Igitur tam A, ipsum E, quàm D, ipsum H, æque metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsimet minimi sunt; Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14 sep.
b 23. sep
c 21. sep.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, siue A, B, C, D, sint continue proportionales, vt vult Euclides, siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersa sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

A	E ---
B	F ----
C	G -----
D	H --------

ij.

PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C; & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A; ad B. Quod n proportionales sint in data proportione A, ad B, hoc est, sit vt A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiat C; & D;[d] erit

	A . .		B . .					
C	D		E					
F,	8.	G,	12.	H,	18.	I,	27.	
K,	16.	L,	24.	M,	36.	N,	54.	O, 81.

d 17. sep

vt A, ad B; ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; [a] erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur.

a 17. sep.

A ..		B ...	
C .... D ...... E			
F, 8.	G, 12.	H, 18.	I, 27.
K, 16. L, 24.	M, 36.	N, 54.	O, 81.

Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos: [b] sunt autem A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportione; [c] Erunt & C, E, extremi, inter se primi. [d] Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

b 24. sep
c 29. sep
d 1. octa.

IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadẽ ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I, [e] erit quoque vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. [f] Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I, ex B, in E, [g] erunt & F, I, extremi, inter se primi. [h] Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

e 18. sep.
f 24. sep.
g 20. sep
h 1. oct.

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinq; numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademq; ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM. I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales

produ-

producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C; & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, a numeri F, G, eandē rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex ijs, quæ ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi sint, ostendetur, vt prius. a 18. sep.

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademq; ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A.. B...
C... D...... E.........
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27
K, 16. L, 24. M, 36. N. 54. O, 81.

COROLLARIVM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continue proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F. G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A; & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A. & B, hoc est, tam numerus F. ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, sit procreatus, ac propterea uterque sit æqualiter æqualis æqualiter; ipsi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, si fuerint quinque numeri minimi proportionales cōtinue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; sic sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij sub alijs denominationi-

bus, quæ

bus, quæ in Algebra solent explicari: Hæc autem omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

NEQVE vero dicere quis poterit, corollarium hoc verũ quidem esse in tribus, quatuorve numeris minimis continue proportionalibus inuentis arte in hac propos. tradita, non autẽ in quibusuis tribus, quatuorve numeris minimis cõtinue proportionalibus vtcunq; propositis: Dicere, inquã, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continue proportionales æquales prorsus sunt ijs, qui per hãc propos. inueniuntur. Si enim illi dati minores essent inuẽtis, non essent inuenti, minimi, quod est contra hãc propos. Si vero dati maiores essent inuentis, non essent illi dati, minimi, quod est contra hypothesim. Quod clarissime ita fiet perspicuum. Dati sint tres numeri A, B, C, minimi continue proportionales: sumptisque duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex scholio propos. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propos. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nã necessario A, ipsi F, æqualis erit; atque ita, cum sit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoque permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde si A, æqualis est ipsi F, erit & B, ipsi G, æqualis: Eademque ratione ostendemus C, æqualem esse ipsi H: ideoque tres A, B, C, tribus F, G, H, singuli singulis, æquales erunt. Eademque ratio est de quatuor, aut pluribus. Quod si A, dicatur minor quam F, ostendemus eodem argumento & B, C, minores esse, quam G, H. Quare F, G, H, minimi non sunt, quod est absurdum, & contra hanc propos. Si vero A, concedatur maior, quam F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quam G, H: atque idcirco A, B, C, minimi non sunt. quod est contra hypothesim. Cum ergo A, minor non sit, aut maior, quam F; æqualis omnino erit, ideoque vt ostensum est, & B, C, ipsis G, H, æquales erunt. Quod est propositum.

A --- B -----C------		
	D, 2. E, 3.	
F, 4.	*G, 6.*	*H, 9.*

COROL-

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionaliũ quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inuentorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtẽdemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ. 29. lib. 7. quemadmodum id demoſtratũ fuit de numeris extremis C,E, & F,I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia ſcilicet producũtur ex illorũ multiplicatione in alios quoſdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G,H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D: Item L,M, N, medij ex A, in G,H,I, vel ex B, in F,G,H, vt ex demonſtratione Euclidis, & ea quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero tam numeri A,C,F,K, quam B, E, I, O, ex conſtructione, continue proportionales ſunt ab vnitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum vero à B, denominentur, vt clarius demonſtrabitur propoſ. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium ſint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris data rationis denominãtur, quot ſunt propoſiti minimi continue proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum cõtinue proportionalium in proportione A, ad B, eſſe vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, eſſe vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem ſi quis optet inuenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, quippe quæ ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via conſequetur. Inuẽtis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator ſit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus conti-

que esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerũ E, ipso D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D. minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo, cum A, & B, metiantur ipsum E; & D, sit mini-
a 32. sep. mus, quem ijdem A, & B, metiuntur; [a] metietur quoque D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum.

b 36. sep. SED iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. [b] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur Cũ A, & B, metiantur ipsum D, & D,
c 11. pro. ipsum E; [c] metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E, Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniã
d 37. sep. igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; [d] metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra
e 37. sep. hypothesim. Immo cũ C, & D, metiantur ipsum F; [e] metietur quoque eũdem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

A.. B... C......

D......

E...............

F- --------

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum, quem A, B, C, metiũtur, eundem F, metiri.

SCHO-

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum DE, sitque F, minimus, quem iidem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum DE, metiri. Si enim nõ metitur, metiantur eius partem D G, relinquatque numerum G E, se minorem.

A.. B... C....
D...................G---E
F............

Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur; & F, ipsum DG,[a] *metientur quoque A, B, C, eundem DG; Ac proinde, cum & totum D E, ponantur metiri;* [b] *metientur & reliquum G E, ipso F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Metitur igitur F, ipsum DE.* a11.pro. b12.pro.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

THEOR. 34. PROPOS. 39. xxxvij.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur partem habebit a metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot vnitates sunt in numero C. Quia igitur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æque metitur; [c] & viciſsim vnitas æque ipsum B, & C, ipsum A, metietur: atq; adeo eadẽ c15.sep

A.............
B.... C...

pars erit vnitas ipsius B, quæ C, ipsius A: Est autē vnitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipsius A, ab eodē B, denominata. Si numerum ergo quispiam numerus metiatur, &c. Quod ostendendum erat.

xxxviij THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipsum A. Nam cum B, pars denominetur à C, sit autem & vnitas pars ipsius C, ab eodem C, denominata;

A . . . .
B . . .   C . . . . .

a 15. sep. metietur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æque.[a] Vicissim ergo & vnitas ipsum B, & C, ipsum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonstrandum erat.

xxxix. PROBL. 6. PROPOS. 41.

NVMERVM reperire, qui minimus cū sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C, Inueniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D, E, F;[b] minimusque, quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimum, qui habeat datas partes A, B, C.

D . .   A, *Secunda*
E . . .   B, *Tertia*
b 38. sep. F . . . .   C, *Quarta*
G . . . .
H . . . .

Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cum D, E, F, ipsum G; metiantur,
c 39. sep. [c] habebit G, partes à D, E, F, denominatas, hoc est, partes A, B, C, cum hę denominentur a D, E, F. Quod vero G, sit

mini-

minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim nō est minimus, habeat, si fieri potest, H, ipso G, minor easdē partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, [a] metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat. a 40. sep.

SCHOLIVM.

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, data partes A, B, C, ipsius G, denominata scilicet à D, E, F. Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metietur aque vnitas ipsos I, K, L, & numeri D, E, F, ipsum G.

A,	Secunda	D ..	I .....
B,	Tertia	E ...	K ....
C,	Quarta	F	L ...
		G	

[b] Vicissim ergo metietur quoque vnitas ipsos D, E, F, & numeri I, K, L, ipsum G, aeque, atque adeo vnitas ipsorū D, E, F, eadem pars erit, qua numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo vnitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominata à D, E, F. b 15. sep.

EX his autem sequitur, minimū numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, à metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM vero, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F,

ſit illius duplus, numerus H; triplus vero I, &c. Dico H, eſſe ſecundum numerum, qui eaſdem partes A, B, C, a numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens eaſdem partes, ſed ipſi ſoli H, I, & cæteri multiplices ipſius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas ſcilicet a D, E, F, ita oſtendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipſum G, per

G............ A, D..
H......................... B, E...
I.................................. C, F....
K ---------------- M ------ L
N ----------------------------- P ------O

conſtructionem; & G, ipſos H, I, & reliquos multiplices ip-
a11.pro *ſius G; a metientur quoque D, E, F, eoſdem H, I, & reliquos*
b39.ſep *multiplices ipſius G. b Quare H, I, & reliqui numeri ipſius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.*

QVOD autem H, duplus ipſius G, minimi, ſit ſecundus eas partes habens, hoc modo demonſtrabimus. Si H, non eſt ſecundus, ſit, ſi fieri poteſt, alius KL, ipſo prior, qui nimirum maior ſit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipſius G. Detracto autem G, ex KL, relinquatur ML, ipſo
a40.ſep. *G, minor. Quoniam igitur KL, partes habet A, B, C; c metiētur ipſum numeri D, E, F, a partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propoſ. 38. huius lib. eundem KL: Metitur au-*
d12.pro. *tem & G, ablatum KM, ſibi æqualem. d Igitur & reliquum ML, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H; cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, ſecundus eſt huiuſmodi partes habens.*

NON *aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, videlicet NO, ipſo prior, qui vide-*

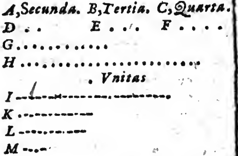
licet

licet maior sit, quàm H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur NO, partes habet A, B, C, [a] *metientur ipsum numeri D, E, F, a partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem NO, per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo æqualem.* [b] *Igitur & reliquum PO, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, eadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, tertius est illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.* a 40. sep. b 12. pro

HVC quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT data partes A, B, C; inueniendusque sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, cõtineat partem B, & pars B, partẽ C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatque G, ex E, in F: Itẽ H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerũ, qui quæritur.



Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Nam cum ex D, in G, fiat H, erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Est autem vnitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nimirum

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D . . E . . . F . . . .
G . . . .
H . . . .
. Vnitas
I ------------------------.
K .-----------
L -----------
M ---

numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G: erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, a numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata, & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, à
a15.def. D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D;[a] Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipsos G. & K, multiplicans
b17.sep. faciat H, & I;[b] erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoque erit numero M, pars toto. Quod est absurdum.

H. G. F. Vnitat.
I. K. L. M.

Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositum.

SI vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorsus est via tenenda ac demonstratio. Vt si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem a 2. denominatam; & hac aliam à 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem a 6. denominatam, vt manifestum est.

QVOD si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet secundum, tertium, quartum, &c. qui easdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eademque est ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

j. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentiũ.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omnium eandem cum eis proportionem habentiũ. Si enim non sunt minimi, erunt alij ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E, F, G, H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunque numeri sunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bi

A........ E---
B............ F----
C................... G------
D......................... H----------

ni sumuntur,& in eadē rōne,[a] erit,ex æqualitate,vt A,ad D,ita E,ad H:[b] Sunt autem A,& D,in sua proportione minimi,quod inter se primi esse ponantur. [c] Igitur tam A,ipsum E,quàm D,ipsum H,æque metietur, maior minorem.Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A,B,C,D,sunt in eadem cum eis ratione,sed ipsimet minimi sunt;Ac propterea,si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum. a 14 sep. b 3.sep c 21.sep.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A,B,C,D,esse minimos in continuatione suarum proportionum,si extremi A, & D, inter se primi sint,siue A,B,C,D,sint continue proportionales, vt vult Euclides,siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersæ sunt,quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

A	E ---
B	F -----
C	G ------
D	H ---------

PROBL. 1. PROPOS. 2. ij.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A,ad B Multiplicans A,seipsum, & numerum B,faciat C,& D.Deinde B,multiplicans seipsum faciat E.Dico C,D,E, esse tres minimos in proportione A, ad B.Quod n proportionales sint in data proportione A, ad B,hoc est,sit vt A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, sic ostendemus. Cum ex A,in A, & B,fiat C,& D,[d] erit d 17.sep

	A ..	B ...		
C	D	E		
F, 8.	G, 12.	H, 18.	I, 27.	
K, 16.	L, 24.	M, 36.	N, 54.	O, 81.

vt A,

vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; [a] erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur.

a 17. sep.

A .. B ...
C .... D ...... E ....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

Quoniam extremi
b 24. sep. C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos: [b] sunt autem A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportio
c 29. sep. ne; [c] Erunt & C, E, extremi, inter se primi. [d] Quare C, D,
d 1. octa. E, minimi sunt in ratione A, ad B.

IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadē ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum
e 18. sep. E, multiplicantes, fecerunt H, & I, [e] erit quoque vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. [f] Quoniam A, & B,
f 24. sep. minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I. ex B. in E,
g 20. sep. [g] erunt & F, I, extremi, inter se primi. [h] Quare F, G, H, I,
h 1. oct. in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinq; numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademq; ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM. I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales

producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C; & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, a numeri F, G, eandē rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex ijs, quæ ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi sint, ostendetur, vt prius. a 18. sep.

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademq; ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A..	B...	
C...	D......	E.........
F, 8. G, 12.	H, 18.	I, 27
K, 16. L, 24.	M, 36.	N. 54. O, 81.

COROLLARIVM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continue proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A; & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, sit procreatus, ac propterea uterque sit æqualiter æqualis æqualiter; ipsi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, si fuerint quinque numeri minimi proportionales cōtinue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij sub alijs denominationi-

bus, quæ

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque est, extremos numeros proportionaliũ quotcunque secundum hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorum, inter se primos esse. Quod quidem facile ostẽdemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29. lib. 7. quemadmodum id demostratũ fuit de numeris extremis C,E, & F,I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia scilicet producũtur ex illorũ multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G,H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D: Item L,M, N, medij ex A, in G,H,I, vel ex B, in F,G,H, vt ex demonstratione Euclidis, & ea quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero tam numeri A,C,F,K, quam B, E, I, O, ex constructione, continue proportionales sunt ab unitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum vero à B, denominentur, vt clarius demonstrabitur propos. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium sint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris data rationis denominãtur, quot sunt propositi minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum cõtinue proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium. &c. Quamobrem si quis optet inuenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, quippe qua ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via consequetur. Inuẽtis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus conti-

nue proportionalium inueniendorum, qui si per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur secundus, & si hic rursum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur a 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis est ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab vnitate dupli, vt prius, qui nimirum denominantur a denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mētio fit in proportione sesquialtera, hoc est, a 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erunt quinque numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinque numerorum in proportione sesquiquinta, vt hic apparet 625. 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non possunt inueniri (quod mirū videri possit) plures numeri continue proportionales, quā propositi sunt. Neque. n. post 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionē sesquiquintam; sicut neque in priori exemplo post 2187. alius pōt reperiri, qui ad 2187. proportionē sesquialterā habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inuenti sint inter se primi, vt ex demonstratione liquet. Hinc. n. fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerū, vt pri-

mus ad secundum, veluti propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.

iij.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

SINT numeri A,B,C,D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A,& D, inter se primos esse. Inueniantur enim duo E,F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K,L,M,N, æqualis sit multitudini A,B,C,D. Quoniã

A,8.B,12.C,18 D,27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K,8.L,12.M,18. N,27.

igitur A,B, C, D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K,L,M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Id quod nos Geometrice demonstrauimus ad finem coroll. 1. superioris propos. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi Primi ergo quoque sunt A,& D. Quocirca, si sint quotcunq. numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

HAEC propositio intelligenda est de numeris minimis cõtinue proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A,B,C,D, non essent proportionales continue, inueniri non possent, ex præcedenti problemate, K,L,M,N, totidem minimi in eadem proportione. Immo si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, cõtinuati in suis proportionibus diuersis, quorũ extremi nõ sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6.10 13. 18. minimi in continuatione

suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. cõpositi sint inter se. Itaque hoc theorema primi est conuersum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et vicissim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At vero primum theorema, prout spectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, vt ex scholio propos. 1. huius lib. liquet; Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter se primi sunt, vt manifestum est in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.

iiij. PROBL. 2. PROPOS. 4.

RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimus numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. a Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeãt, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H.

a 36. sep.

A, 6.	B, 5.	C, 4.	D, 3.
H, 4.	F, 24.	E, 20.	G, 15.
I ------	K ------	L ------	

Quo posito, b A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E, c Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem

b 9. pron. c 18. sep.

ratione

ratione,cũ C,& D,æque metiantur ipsos E,& G;erit vt C,ad D, ita E,ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sũt in rationibus A,ad B,& C, ad D. Quod

A,6.B,5.C,4. D,3.
H,4. F,24. E,20. G,15.
I ------ K ----- L -----

autem minimi ſint. ſic manifeſtum erit. Si non ſunt minimi, erunt aliqui illis minores, ſingulis ſinguli, in eiſdem rationibus: ſint, ſi fieri poteſt, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione: [a] ipſi æque metientur I, & K, in eadem proportione exiſtentes, nimirum B, ipſum K, conſequens conſequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K,& L, nimirum C, ipſum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C, ipſum K, metiantur; [b] metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B,& C, metiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis F, E, G, in rationibus A,ad B, & C, ad D; Ac propterea ipſi F,E,G, minimi ſunt in datis rationibus. a 21.sep. b 37.sep.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C,ad D; & E, ad F; inueniendique ſint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. [c] Inuento rurſum numero G, minimo, quem metiantur B, ſecundus, & C, tertius; quoties B, ipſum G, metitur, toties metiatur A, ipſum H; & quoties C, ipſum G, toties D, ipſum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipſum I, metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ipſum I, metitur, toties F, metiatur ipſum K. Dico H, G, I, K, minimos eſſe in datis rationibus. Quod enim ſint in datis ra- c 36.sep.

A,6, B, 5,C, 4.D,3. E, 5.F,7.
H,24. G,20. I,15. K,21.
L---- M ------ N ---- O -----

tionibus deinceps proportionales, conſtat. Cum enim A, & B, ipſos H,& G, ęque metiantur; erit vt prius, quemadmodum A ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quod tam C, & D, ipſos G, & I, quam E, & F, ipſos I, & K, metiãtur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi, ſic oſten-

demus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest, L,M,N,O. Quia
a 21. sep. igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; [a] ipsi metientur æque L,& M, eandem habentes rationem, nimirũ B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipsum M, metiantur; [b]
b 37. sep. metietur eũdem M,& numerus G, minimus, quem B,& C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H,G,I,K; Ac proinde H,G,I,K, in datis rationibus minimi sunt.

c 36. sep. SED iam E, non metiatur ipsum I. [c] Inuento ergo numero K, minimo, quem E,& I, metiantur; quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L; & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis.

A,6. B,5. C,4. D.3. E,2. F,7.
H,24. G,20. I,15.
M,48. L,40. K,30. N,105.
O---- P---- Q---- R----

Cum enim H, G, I, ipsos M, L, K, æque metiantur; erit vt supra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Est autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D, quod & A,B, ipsos H,G: & C,D, ipsos G,I, metiantur æque. Igitur vt A, ad B, ita M, ad L, & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoque est K, ad N, cum E,F, æque ipsos K, N, metiantur. Sunt ergo M,L,K,N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si namque non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione
d 21. sep. minimi sunt, [a] ipsi æque metientur O, P, in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æque, videlicet antecedens C, antecedentem P. Atque
e 37. sep. adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur, [b] metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem

P. Quia

P. Quia vero ostensum est, esse vt G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcirco, cum metiatur G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q; [a] quod E, F, in sua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiusdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipsum Q; [b] metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quã M, L, K, N; proptereaque ipsi M, L, K, N, minimi sunt. [a] 21. sep. [b] 37. sep

QVOD si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta posteriori agendum, vt nuper cũ tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,3. T,2.
M,48. L,40. K,30. N,105. O,70.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,9. T,2.
M,48. L,40. K,30. N,105.
R,144. Q,120. P,90. O,315. V,70.

Si vero S, ipsum N, non metiatur, [c] sumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P, & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties vero S, eundem O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat. [c] 36. sep.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliqua data fuerint in numeris non minimis, absoluemus nihilo minus problema propositũ; sed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestum est.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & consequens, licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, si ij multiplicentur per quemcũque numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.

V. THEOR. 3. PROPOS. 5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; posterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F, vel ex proportionibus C, ad, F, & D, ad E; ita vt latera vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; a erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B, erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, &

A, 24.	B, 48.	
	G, 18.	
C, 4. D, 6.	E, 3. F, 16.	

a 17. sep. (margin note)

D,ad F.[a] Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A,ad G,&G,ad B. Eadē ergo proportio A,ad B,ex proportionibus laterū C,ad E,& D,ad F,cōponitur. a 27.def

EODEM argumento ostendemus,proportionem A,ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D,ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D,multiplicans C, & F,faciat A, & G, [b] erit A, ad G, vt C,ad F. Similiter cum F,multiplicans D,& E,faciat G, & B, erit G,ad B,vt D,ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F,& D,ad E.[c] Cum ergo proportio A,ad B,componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B, eadem ex proportionibus C,ad F,& D,ad E,componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat. b 17.sep c 27.def

A, 24. B, 48.
G, 96.
C, 4. D, 6. F. 16. E, 3.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales,primus autem secundum non metiatur; neque alius quispiam vllum metietur.

SINT continue proportionales A,B, C,D,E, & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proxime insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit vt A, ad B. ita B, ad C; C,ad D;& D, ad E: A,vero ipsum B,non metiatur, neque B,ipsum C,neque C,ipsum D, neque D,ipsum E, metietur. Quod vero nec alius quispiam illorum vllum metiatur, sic demonstrabimus. [d] Sumptis tribus numeris minimis F,G,H,in ratione A, ad B, erit ex æquo, vt A,ad C, ita F, ad H. Quia vero est vt A,ad B,ita F,ad G, d 2.octaui.

A,16 B,24. C,36. D,54. E,81.
F, 4. G, 6. H, 9.

A,16.B,24.C,36.D,54.E,81. non metitur aũt A, ipsum F, 4. G, 6. H, 9. B;neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F,non erit vnitas; alias F, ipsum G, metiretur,cum vnitas omnem numerũ metiatur. [a] Quare cum F,& H, sint inter se primi, & F,non sit vnitas;non metietur F,ipsum H;Atque ob id neque A,ipsum C,metietur.Est enim ostensum esse A,ad C,vt F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium a se nunerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A,ad B, simili modo demon strabimus,neque A,quartũ D,neque B,quartũ E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

a 3. oct.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hac propositio ad hunc modum.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam vllius multiplex erit.

SINT enim continue proportionales A,B,C,D,E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neque alium quenquam illorum vllius esse multiplicem. Quod enim nullus proxime insequentis multiplex sit, constat. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non sit autem A, ipsius B,multiplex;neque B,ipsius C;neque C,ipsius D; neque D, ipsius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quisquam illorum vllius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur.Quoniam D,ipsius E,non est multiplex: non metietur e contrario E,ipsum D,per ea,quæ in defin.5,lib.7.scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunque E,D,C,B,A;(Nam cum sit D,ad E, vt C, ad D; B, ad C,& A,ad B;erit conuertendo E,ad D, vt D, ad C; C, ad B;& B,ad A.)Et E,primus secundũ D,nõ metitur;[b] ne-

A,81.B,54.C,36.D,24.E,16.

b 6. oct.

que

que alius quisquā illorū vllum metietur. Quare e cōtrario, si maiores ad minores referantur, neque quisquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defi. 5. lib. 7. scripsimus.

SED & ex his sequens theorema demonstrabimus.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero secūdum metiatur; & quicūque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quēque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet proxime insequentem metiatur, perspicuum est. Nā

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C: & C, ipsum D: & D, ipsum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostēdetur. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D, a metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur, b metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis. a 11. pro. b 11. pro.

SED iam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; & C, ad D, & D, ad E sit autem A, ipsius B, multiplex: erit & B, ipsius C, & C, ipsius D, & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

proxime insequentis multiplex est. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex, metietur e contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet

sequentium metietur, vt demonstratum est; Ac propterea e contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propositionem sextam, & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales; primus autem, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex; neque primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quisque nullum a secundo B, metiatur. Dico neque A, primũ metiri B, secundum. Si n. A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cum neque primus, neque alius quisquam vllum a secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

IAM vero A, primus, vel alius quisquam nullius a secũdo B, sit multiplex. Dico neque A, primũ multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secundi, multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quisquam vllius a secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus extremum E, metiatur: Dico & A, primum metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, nō dicatur metiri: a neque alius quisquam vllum metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum: Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur; Atque idcirco si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

a 6. oct.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod secundo loco in scholio præcedentis propos. demonstrauimus, cōuertamus, amplificabimus hanc propos. hoc modo.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autē, vel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quispiam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex; neque alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 9. & 1. theoremate scholij præcedentis. Quod est contra hypothesim.

THEOR. 6. PROPOS. 8. viij.

SI inter duos numeros medij continua

proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT inter duos numeros A, B., medii proportionales continue C, D; sitque vt A, ad B, ita E, ad F.

A, 24.	C, 36.	D, 54.	B, 81.
G, 8.	H, 12.	I, 18.	K, 27.
E, 32.	L, 48.	M, 72.	F, 108.

A, 40.	C, 20.	D, 10.	B, 5.
G, 8.	H, 4.	I, 2.	K, 1.
E, 8.	L, 4.	M, 2.	F, 1.

A, 27.	C, 9.	D, 3.	B, 1.
G, 27.	H, 9.	I, 3.	K, 1.
E, 108.	L, 36.	M, 12.	F, 4.

Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot sunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, vt A, ad B, atque adeo vt E, ad F, ita G, ad K. a 3. oct. a Quare cum G, & K, inter se primi sint, quippe qui extremi sint minimorum numerorum; b 23 sep b ac propterea in sua proportione minimi; c 21. sep. c æque metietur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, d 9. pron singuli singulos. d Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipsos E, L, M, F, producunt; in eisdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus. At G, H, I, K, sunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales sunt; Atque idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis sit multitudini A, C, D, B, tot cadent medii proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medii continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

NON solum ex demonstratione constat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem esse proportionem numerorum E, L, *M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, L, M, F, in eadem esse proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.*

EADEM hæc propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, vnitas. Item si vel A, vel B. fuerit vnitas, existentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros dupla proportionis, vel superparticularis cuiuscis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalem: Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; superparticularis vero inter numeros sola vnitate differentes; superbipartientes denique inter numeros, quorum differentia est binarius; si inter duos numeros dupla proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros sola vnitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui easdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione potest, Nam neq; inter binarium & vnitatem, neque inter duos numeros sola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abest, vt aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interijcitur solum numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modũ demonstrabimus. Differant numeri A B, C D, (siue C D, vnitas sit, & A B, ternarius, siue non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quam A B, maior vero quam C D, vnitate quoque. Dico E F, non esse medium proportionalẽ inter A B, CD.

A . . G . B	A ..... G . B
E . H . F	E ..... H . F
C . D	C .... D

A .. G . B | A ...... G . B
E . H . F | E ..... H . F
C . D | C ..... D

CD. Si enim dicatur esse AB, ad EF, ut EF, ad CD: ablato ex AB, numero AG, ipsi EF, æquali, ut reliqua sit unitas GB; & ex EF, numero EH, ipsi CD, æquali, ut relinquatur etiam unitas HF; erit quoque ut AB, totus ad EF, totum ita AG, ablatus ad EH, ablatum; cum AG, EH, ipsis EF, CD, æquales sint, ex constructione. Igitur erit quoque reliquus GB, ad reliquum HF, hoc est, unitas ad unitatem, ut totus AB, ad totum EF, maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo EF, medius proportionalis est inter AB, & CD.

ITAQVE inter numeros tripla proportionis medius proportionalis cadere non potest. Alioquin caderet etiã medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter se differunt, quod fieri non posse, proxime demonstrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ. quod fieri non posse, ita demonstrabimus. Cadat primum, si fieri potest, inter quinarium A B, & unitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita ut sit A B, ad D, ut D, ad C: Et conuertendo C, ad D, ut D, ad AB. Et quoniam unitas C, metitur D; metietur quoque D, ipsum AB. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque senarium AE. Igitur D, metitur totũ AE, & ablatum AB: [a] ac proinde & D, numerus metietur reliquam unitatem BE. Quod est absurdum.

A ..... B. E
D .. D ...
C .

a 11. pro.

CADAT deinde, si fieri potest, inter quinarium A B, & unitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Ostendemus ergo, ut prius, D, metiri quinarium AB: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam AE. Igitur D, metitur totum AB, & ablatum AE: [b] ac proinde & D, numerus re-

A .... E . B
D ....
C .

b 11. pro.

liquam

liquam vnitatem EB, metietur. Quod est absurdum.

EX quibus fit, neque illud interuallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, vt Diapason, vel, vt vulgo dicitur, octaua; neque illud, quod in sesquioctaua proportione reperitur, cuiusmodi est Tonus, seu vulgo, secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadrupla cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros dupla proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquialtera, hoc vero in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoq; Tonus in duo semitonia, quorũ alterũ maius, alterũ minus dicitur, secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiusdẽ, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cum enim per ea quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti, quadratorũ vero proportio sit duplicata proportionis laterum; fit, vt proportio quadrati ex diametro descripti, ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros dupla proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus, manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est diametrum esse lateri incommensurabilem, qua de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.

ix. THEOR. 7. PROPOS. 9.

SI duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter ſe primos medij continue proportionales C, D. Dico totidem cadere continue proportionales inter vnitatem, & A; nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C, a ſumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo aſſumptorum æqualis ſit multitudini A, C, D, B Quoniam ergo A, B, extremi inter ſe primi ſunt; b erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex conſtructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipſis A, C, D, B, æquales ſunt ſinguli ſingulis, vt K, ipſi A, & N, ipſi B, ne minores minimis dentur. Quia vero, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. E, ſeipſum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipſum G, fecit K, c metietur E, ipſum G, per E, & G, ipſum K, per eundem E: d Metitur autem & vnitas ipſum E, per E. Aeque igitur metietur vnitas ipſum E, & E, ipſum G, & G, ipſum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipſius E, & E, ipſius G, & G, ipſius K. e Proportionales ergo ſunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifeſtum ſit ex eadem demonſtratione propoſ. 2. huius lib. quod F, ſe ipſum multiplicans producat I, multiplicans vero ipſum

A,8. C,12. D,18. B,27.
Vnitas.
1.
E,2. F,3.
G,4. H,6. I,9.
K,8. L,12. M,18. N,27.

Marginal notes: a 2. oct. — b 1. oct. — c 7. pro. — d 5. pro. — e 20. def.

I, faciat N; [a] metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundem F: [b] Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Aeque igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. [c] Proportionales ergo sunt cõtinue, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, vna cum vnitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B; (vt perspicuum est ex propos. 2. huius lib. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertii; & quatuor K, L, M, N, quarti. &c.) tot cadent medij continue proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem, & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat. a 7. pron. b 5. pron. c 20. def.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est; numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habẽt E, et F, numeri ad vnitatem, id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoque asseruimus.

CONSTAT etiã ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continue esse proportionales ab vnitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10. X.

SI inter duos numeros, & vnitatem continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medij continue proportionales; inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E: At vero inter B, & vnitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim se mutuo C, & F, faciāt I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sūt inter vtrumque A, B, & vnitatē. Quoniā igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D, D, ad E; & E, ad A; æque metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A: [a] Metitur autem vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. [b] Quare C, seipsum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; [c] erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; [d] erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [e] erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continue proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex ijs, quæ a nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratio-

A, 81.	M, 162.	N, 324.	O, 648. B, 1296.
E, 27.	K, 54.	L, 108.	H, 216.
D, 9.	I, 18.	G, 36.	
C, 3.		F, 6.	
	I.		
	Vnitas.		

a 5. pro.
b 9. pro.
c 17. sep.
d 17. sep.
e 18. sep.

ne,

ne, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B; erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cum multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum. 18. sep.

SCHOLIVM.

EX his constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales sunt C, & F, habent.

PATET etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales, secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est, ex eo quod C, D, E, A, continue proportionales sunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium sumentes.

I.

SI sint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

catam eius,quam habent secundi ab eodē; quarti verò eiusdē triplicatā;& quinti quadruplicatā; & sēper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continue proportionales B,C,D,E & ab eodem totidem alij F,G,H,I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam; & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R, & ex F, in R, fiat S.

E, 162.		I, 512.
D, 54.	Vnitas.	H, 128.
C, 18.	1.	G, 32.
B, 6.		F, 8.
	A, 2.	
N, 36.	K, 4.	Q, 64.
O, 216.	L, 8.	R, 512.
P, 1296.	M, 16.	S, 4096.

Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab vnitate, vt constat ex scholio propos. 9. huius lib. Eademque ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij: Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F, & eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rōnis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij; quòd tam B, N, quam F, Q, sint ab vnitate continue proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio

E, 81.		I, 1.
D, 54.	Vnitas.	H, 2.
C, 36.	1.	G, 4.
B, 24.		F, 8.
	A, 16.	
N, 576.	K, 256.	Q, 64.
O, 13824.	L, 4096.	R, 512.
P, 331776.	M, 65536.	S, 4096.

E,81. I,1.
D,54. Vnitas. H,2.
C,36. 1. G,4.
B,24. F,8.
A,16.
N,576. K. 256. Q.64.
O,13824. L,4096. R,512.
P,331776. M,65536. S,4096.

C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eisdẽ argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad A; quod tam B, N, O, quam A, K, L, sint ab vnitate continuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. & eiusdem triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemque modo est A, ad H, vt L, ad R: quòd vtraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F: Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex 1. theor. huius scholij, propterea quòd tam A, K, L, quam F, Q, R, continuè proportionales sunt ab vnitate, ex scholio propos. 9. huius lib. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, ex 1. theor. eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R, sunt continuè proportionales ab vnitate ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri vnius ordinis desinant in vnitatem, vt ex secunda figura est manifestum, in qua I, est vnitas.

CAETERVM theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III.

SI inter duos numeros, & aliquem aliũ numerum assumptum, continue proportio-

nales

nales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Itē

A, 162. Q. 216. R, 288 S, 384 B, 512.
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.
E, 18. N, 24. H, 32.
D, 6. G, 8.
C, 2.
K, 9. L, 12. M, 16.

tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G: erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoque E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est vt K, ad M, ita E, ad H: Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L: a cadet quoque vnus medius, nimi- a 8. oct.
rum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi.

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur, veluti perspicuum est in hac secunda figura, in qua numerus B, vnitas est, caduntque tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri con-

B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D: cum hæc proportio eadem ſit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus, medius proportionalis eſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem eſt proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, qua lateris C, ad latus D, vt demonſtratum eſt.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrum libet quadratorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos.

A, 9.	E, 21.	B, 49.
C, 3.		D, 7.

Cum enim A, E, B, proportionales ſint oſtenſi in ratione C, ad D, hoc eſt, eſſe A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipſum E, antecedens antecedentem; quandoquidem eſt E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum ſuum A. Igitur E, & A, menſuram communem habent C; atque adeo inter ſe ſunt compoſiti. Similiter cum ſit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, ſuum quadratum A, antecedens antecedentem: metietur quoque D, ipſum E, conſequens conſequentem. Quare cum & latus D, metiatur ſuum quadratum B: habebunt E, & B, communem menſuram D: Ideoque compoſiti erunt inter ſe. Perſpicuum autem eſt ex hac demonſtratione, priorum numerorum A, E, communem menſuram eſſe C, latus prioris quadrati A; poſteriorum vero E, B, menſuram communem eſſe D, latus quadrati poſterioris B.

THEOR. 10. PROPOS. 12. xj.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et cu-

bus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A,& B, quorum latera C, & D. Dico inter A,& B,duos medios numeros continue proportionales cadere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus.

A,27. H,36. I,48. B,64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C,3. D, 4.

Multiplicans enim C, seipsum faciat E: & D, seipsum multiplicans faciat F: At C,& D,se mutuo multiplicantes faciant G: Multiplicantes vero G,faciant H,& I.Quoniam igitur C,seipsum,&
a17.sep. D,multiplicans fecit E,& G:[a] erit, vt C, ad D, ita E, ad G.Eadem ratione,cum D,multiplicans C,& seipsum,fecerit G,& F: [b] erit quoque vt C,ad D, ita G, ad F, pro-
b17.sep. ptereaque E, G, F, continue proportionales sunt in ratione C,ad D.Rursus,quia ex defin.cubi,C,ipsum E,multiplicans fecit A, & ex constructione multiplicans ipsum G,fecit H:[c] erit vt E,ad G,hoc est,vt C,ad D. ita A,
c17.sep. ad H.Similiter cum D,ipsum G,multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I: multiplicans vero ipsum F, ex defin.cubi.fecerit cubum B;[d] erit quoque,vt G, ad F,
d17.sep hoc est,vt C,ad D,ita I,ad B:[e] Est autem & H,ad I, vt C,
e18.sep. ad D: quod C,& D, ipsum G, multiplicantes fecerint ex constructione,H,& I.Igitur A,H,I, B, cõtinue sunt proportionales in ratione C,ad D: Atque adeo inter cubos A,& B,duo medij H,& I,cadunt continue proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I, B, continue sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius,quam habet A,ad H:triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cum sit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

SCHO

SCHOLIVM.

HIC quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales, H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D: hoc est, esse A, ad H, et I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem; si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur, metietur quoque C, ipsum I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum suum A; immo & ipsum H, quod H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C; atque adeo inter se compositi sunt. Similiter cum sit A, ad ad H, vt C, ad D: metiatur autem latus G, cubum suum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D, ipsum H, consequens consequentem: Metitur autem & latus D, cubum suum B: immo & ipsum I, quod I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D: Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem etiam hic est, priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A; posteriorum vero trium H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi E.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

THEOR. 11. PROPOS. 13. xij.

SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes iam factos fe-

cerint aliquos: ipsi quoque proportionales erũt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT continue proportionales A, B, C, qui seipsos multiplicantes faciãt D, E, F, multiplicantes autem ipsos D, E, F, faciant G, H, I; & rursum multiplicantes ipsos G, H, I, faciant K, L, M, & ita deinceps. Dico quoque D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continue esse proportionales. Multiplicantes.n. A, & B, se mutuo faciant N; & B, C, se mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A; multiplicans N, E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat R, S.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 2048. M, 4096.

Simili modo A, multiplicans P, Q, H, faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, a. Quoniam igitur A, mul-
a 17. sep. tiplicans seipsum, & B, fecit D, N, a erit vt A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & seipsum fecit N, & E; erit etiam, vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rursus, quia B, seipsum, & numerum C, multiplicans fecit E,
b 17. sep & O; b erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eademque ratione, cum C, multiplicans B, & seipsum, fecerit O, & F; erit vt B, ad C, ita O, ad F; propterea que & E, O, F, continue proportionales sunt in ratione B, ad C, seu A, ad B. Quare cum D, N, E, in eadem ratione sint continue proportionales, in qua E, O, F; erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F, atque adeo D, E, F, continue proportionales sunt.

DEINDE, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E; hoc est, in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, mul-
c 18. sep tiplicantes E, fecerunt Q, & H; c erit quoque, vt A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportiona-

les in

les in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonstratis ad propos. 18. lib. 7. H, R, S, proportionales in ratione E, O, F, hoc est, B, ad C, seu A, ad B. Et eodem modo cum B; C, multiplicantes F, fecerint S, & I; [a] erit vt B, ad C, hoc est, vt A, ad B, ita S, ad I; proptereaque & H, R, S, I proportionales sunt in ratione A, ad B. Quocirca, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue sunt proportionales. a18. sep.

NON dissimili argumento demonstrabimus & K. L, M, esse continue proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonstratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata rõne datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc est, A, ad B, &c.

IAM quoque numeri secundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B. Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata, & sic deinceps semper vno amplius.

BREVIVS propositionem totam demonstrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in seipsos, numeri D, E, F; & in hos ex eisdẽ numeri G, H, I; & rursum ex eisdem in hos numeri K, L, M. Dico D, E, F; & G, H, I; & K, L, M, esse quoque continue proportionales. Nam ex scholio propos. 9. huius

A, 2.	B, 4.	C, 8.
D, 4.	E, 16.	F, 64.
G, 8.	H, 64.	I, 512.
K, 16.	L, 256.	M, 4096.

lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, cõtinue, sunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1 theoremate scholij propos. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiusdem rationis B, ad C, duplicata est ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur

D, E,

D, E, F, continue sunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo ostendemus G, H, I, esse proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

EX qua rursum demonstratione apparet, numeros primo loco productos esse in duplicata ratione duorum numerorũ; secundo vero loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonstratione huius propos. 13. dati sint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C, eandem tamen propositionem demonstrabimus, etiam si plures fuerint, quam tres. Sint namque numeri plures, quam tres A, B, C, D, cõtinue proportionales, qui se ipsos multiplicantes faciant E, F, G, H; postea vero multiplicantes ipsos E, F, G, H, faciant

A, 2.	B, 4.	C, 8.	D, 16.
E, 4.	F, 16.	G, 64.	H, 256.
I, 8.	K, 64.	L, 512.	M, 4096.

a 13. oct. *I, K, L, M, & sic deinceps. Quoniã igitur E, F, G, a ex demonstratis, proportionales sunt. Item F, G, H, cum illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus in se ipsos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in se ipsos. Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L, M, & alij deinceps eodem modo producti.*

xiij. THEOR. 12. PROPOS. 14.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales sunt in ratione

C, ad

C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B,ª metietur quoque A, primus secundum E. Quare cum sit vt A, ad E, ita C, ad D. & C, latus latus D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36, C, 2. D, 6.

a 7. oct.

METIATVR iam C, latus latus D, Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, vt demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum, ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numeris quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 15. xiiij.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F, multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum,ᵇ metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216, E, 4. G, 12. F, 36, C, 2. D, 6.

b 7. oct.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, vt ostensum est

propos. 12. huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D; metietur & A, ipsum B; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propos. 6. huius lib. demonstrauimus. Itaque si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

XV.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI quadratus numerus quadratum numerum nō metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; [a] metietur & quadratus A, quadratum B. Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16.	B, 81.
C, 4.	D, 9.

a 14. oct.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; [b] metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

b 14. oct.

XV.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; a metietur quoq; A, cubus cubũ B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur. a 15. oct.

A, 8.	B, 27.
C, 2.	D, 3.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat. b 15. oct.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propositiones hoc etiam modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. c Igitur & latus D, latus C metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit. c 14. & 15. oct.

QVOD si latus C, lateris D, multiplex sit; metietur latus D, latus C. d Igitur & B, ipsũ A, quadratus quadratũ, et d 14. & 15. oct.

A, 36. B, 9. cubus cubum metietur, Ac propterea A,
C, 6. D, 3. ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex.

A, 64. B, 8. AT vero si A, ipsius B, quadratus
C, 4. D, 2. quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex, non metietur B, ipsum A, quadra-
a 16. & 17. oct. A, 49. B, 9: tus quadratum, aut cubus cubum. a Igi-
C, 7. D, 3. tur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.

A, 125. B, 8. SIMILITER si C, latus lateris D,
C, 5. D, 2. non sit multiplex, non metietur D, latus latus C. b Igitur, nec B, ipsum A, quadratus
b 16. & 17. oct. quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, et cubus cubi, multiplex nō erit.

xvj. THEOR. 16. PROPOS. 18.

DVORVM similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius vero illis proportionalia E, F, ita vt C, D, se mutuo multiplicantes faciant A, & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B, sitque vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim se mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur est C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G, c erit A, ad G, vt C, ad E, hoc est, vt D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit

A, 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

c 17. sep.

G, & B,

G,& B; erit quoque G, ad B, vt D,ad F. Proportionales ergo sunt A,G,B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A, 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

217 sep.

QVIA vero, cum A,G,B, sint continue proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc est, C, ad E, vel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVIA ostensum est A,G,B, esse proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C,E, vel D, F, assumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A,B, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A,G,B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F, metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C,D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quod sit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C,D, latera suum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E,F, ipsum G, consequentes consequentem. Quare cum & E,F, latera suum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem mensuram tam E, quam F; ideoque erunt inter se compositi.

EX qua demonstratione etiam manifestum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes mensuras esse C, D, latera prioris plani A; posteriorum autem G, B, mensuras communes esse E,F, latera plani posterioris B.

xviij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

DVORVM similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT solidi numeri similes A, B, & latera illius sint C,D,E, huius vero illis proportionalia F, G, H, ita vt sit C,ad D,quemadmodum F,ad G,& D,ad E,sicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, esse triplicatam eius,quam habent latera homologa C,F,vel D, G, vel E, H.

A,30. M,60. N,120. B,240.
I, 6. L, 12. K,24.
C,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10.

Multiplicantes enim se mutuo C,D,faciant I;& F,G,se mutuo multiplicãtes faciant K.Itẽ D,F, se mutuo multiplicãtes faciãt L. Postremo E,H,ipsum L,multiplicãtes faciãt M, N. Quia igitur C,D,E,ipsis F,G,H,proportionales sunt; erunt & permutando proportionales,nimirum vt C, ad F,ita D,ad G,& E,ad H. Quoniam vero D, multiplicans
a17.sep. C,& F,fecit I,& L;[a] erit vt C,ad F,ita I,ad L.Simili mo-
b17.sep. do,quia F,multiplicans D,& G,fecit L, & K; [b] erit quoque vt D,ad G,ita L,ad K.Sunt ergo I,L,K,continue proportionales in ratione C,ad F,vel D,ad G,vel E,ad H.Et quoniam A,solidus factus est ex mutua multiplicatione laterum C,D,E;factus est autem I, ex multiplicatione mutua C,D;fit vt E,multiplicans I,faciat A.Eodem modo cum B,solidus factus sit ex mutua mulilplicatione laterum F,G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F,G;numerus H,ipsum K, multiplicans faciet B. Quare
c17.sep. cum E,multiplicans I,& L,fecerit A, & M. [c] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc est, vt C,ad F, vel D,ad G,vel E,ad H.Eadem ratione,cum H, multiplicans L, K, fecerit N,

& B;

& B; [a] erit N, ad B, vt L, ad K, hoc est, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. [b] Est autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipsos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, solidos similes duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

a 17. sep.
b 18. sep.

QVONIAM vero, cum A, M, N, B, sint proportionales continue; proportio A, B, triplicata est eius, quam habet A, ad M; Est autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: Habebit quoque A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum similium solidorum numerorum duo medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit A, M, N, B, proportionales esse in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, liquet inter duos similes solidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, assumptorum.

Ex ijs, quæ dicta sunt, perspicuum etiam est, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet solidorum A, B, inter se esse compositos. Cum enim A, M, N, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; hoc est, esse A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: metiantur autem F, G, H, latera suum solidum B, consequentes consequentem, si de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur: metientur quoque C, D, E, ipsum N, antecedentes antecedentem: quod sit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipsum M, metiuntur: (Cum enim M, factus sit, per constructionem, ex E, in L, metietur E, ipsum M. Deinde quia M, N, B, proportionales sunt ipsis I, L, K, metitur autem K, ipsum B, quod B, factus sit ex K, in H; metietur quoque I, ipsum M: Metiuntur autem & C, D, latera planum suum I.

a 11.pro. a *Igitur & C,D,metientur ipsum M; Atque adeo C, D,E, ipsum M,metientur.) Nec non & ipsum A, nimirum latera suum solidum. Ergo A,M,N,habent communem mensuram tam C,quam D, & quam E; Ideoque compositi inter se sunt. Rursus quia est A,ad M,vt C, ad F, vel D, ad G, vel E,ad H; metiuntur autem C,D, E, latera solidum suum A, antecedētes antecedentem; metientur quoque F, G, H, ipsum M,consequentes consequentem. Metiuntur vero F,G,H,ipsum N; (Cū*

A,30. M,60. N,120. B,240.
I,6. L,12. K,24.
C,2.D,3. E,5.F,4.G,6. H.10.

enim N,factus sit ex H, in L, per constructionem; metietur H,ipsum N. Deinde quia A,M,N,ipsis I,L,K, proportionales sunt: metitur autem I,ipsum A,quod A, factus sit ex I, in E; metietur etiam K, ipsum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum suum K; metientur quoque F, G, ipsum N; atque adeo F,G,H,ipsum N,metientur.) Necnon & ipsum B, nimirum latera suum solidum. Igitur M,N,B, communem habent mensuram tam F,quam G,& quā H. Quare sunt inter se compositi. Ex quibus liquido constat, priorum trium numerorum A, M, N, communes esse mensuras C,D, E,latera prioris solidi A; At vero F, G, H, latera posterioris solidi B,communes mensuras esse posteriorum trium numerorum M,N, B.

QVIA vero solidus numerus tria latera habet,ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonstremus hoc loco,eundem numerum solidum procreari,siue primum latus ducatur in secundum, & numerus procreatus in tertium; siue primum in tertium, & numerus genitus in secundum; siue denique secundum in tertium, & productus numerus in primum. Quin etiam,propositis quotuis numeris,eundem semper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunque ordinem inter se permutent. Quæ quidem res magnum vsum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiusmodi theorema:

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione

idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent.

SINT primum tres numeri dati A,B,C, & ex A, in B, fiat D, & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, si ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item si ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans, D, facit E, [a] *erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem; Sed vt C, ad vnitatem,* [b] *ita quoque est F, ad A; quod A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B,* [c] *ita est A, ad vnitatem; propterea quod A, multiplicans B, facit D. Igitur ex aequalitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem:* [d] *atque idcirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc est, ipsemet numerus E, aequalis erit numero facto ex B, in F, productum ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod est primum.*

A, 3.	B, 5.	C, 8.	
D, 15.	E, 120.	F, 24.	G, 40.
E,	F,		
D,	A,		
B,	vnitas.		

a 15. def.
b 15. def.
c 15. def.
d 19. sep.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; [e] *erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem,* [f] *ita etiam est G, ad B, eo quod G, factus est ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A,* [g] *ita est B, ad vnitatem, propterea quod D, factus est ex A, in B. Igitur ex aequo erit, vt E, ad A, ita G, ad vnitatem:* [h] *ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id est, ipsemet numerus E, aequalis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod est secundum.*

E,	G,
D,	B,
A,	vnitas.

e 15. def.
f 15. def.
g 15. def.
h 19. sep.

SINT deinde quatuor numeri A,B,C,D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C. Item ex A, in C, et ex producto in B, & ex

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5.
E, 120.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

producto in D: Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C: Item ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B: Item ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Item ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A: ita vt præter primam multiplicationem, quã omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diuersæ producentes eundem semper numerum. Quoniã enim vt in tribus ostensum est, idem numerus fit, siue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic productus in C, constat id quod primo loco proponitur.

DEINDE quia vt in tribus est ostensum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuũ est eundẽ numerũ gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tũ ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, quod est secundum.

TERTIO quoniam, vt in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, siue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex pruducto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cum ergo ille sit æqualis proxime ostensus primo producto, erit & hic æqualis eidem; quod est tertium.

QVARTO quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille ostensus est primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.

QVINTO quoniam, vt demonstratum est in tribus,

idem

idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cum ergo ille sit ostensus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem æqualis. Quod est quintum.

SEXTO, quia, vt in tribus demonstrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quam ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod est sextum.

SEPTIMO quia, vt in tribus ostendimus, idem numerus gignitur, siue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in A; constat eundem numerum fieri ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui fit ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Sed hic proxime ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & ille, quod est septimum.

OCTAVO quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Sed ille primo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur et hic. Quod est octauũ.

NONO quia, vt demonstratũ est in tribus, idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A. Sed ille ostensus est septimo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod est nonum.

DECIMO quoniam, vt in tribus est demonstratũ, idem gignitur numerus ex A, in C,

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5.
E, 120.

A,2. B,3. C,4. D,5.
E,120.

& ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco est ostensum, æqualis est ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic Quod est decimum.

POSTREMO quoniam, vt ostensum est in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in B, procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod est vndecimum.

EODEM argumentandi modo vtendum est in quinque vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinque assumatur id, quod iam in quatuor demonstratum est, & in sex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutaui mus, idemque semper numerus ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter se ordinem permutent, eundem semper gignent numerum: ac proinde tam secundus ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

xvij. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A,& B,medius proportionalis D.Dico A,& B,esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A,C,B. Quia igitur D,E.minimi sunt in ratione A, ad C,[a] metientur D,& E,ipsos A,& C,æque : metiantur per F. Similiter æque metientur ipsos C,& B:metiantur per G.[b] Itaque F,multiplicans D,& E, faciet A ; & C: [c] Item G , eosdem D , & E , multiplicans faciet C,& B.Quia ergo E,multiplicans F,& G,fecit C,& B,[d] erit,vt C,ad B,ita F:ad G: Vt autem C,ad B,ita erat D,ad E.Igitur erit vt D,ad E,ita F,ad G,& permutando vt D,ad F,ita E,ad G.Quoniam vero F,multiplicans D, fecit A,erit A, planus, cuius latera D,F.Simili modo quia G, multiplicans B,fecit B , erit & B,planus cuius,latera E, G.Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia,hoc est,D,ad F,vt E,ad G, erunt ex defin.A, B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus,&c.Quod demonstrandum erat. a 21. sep. b 9. pron c 9. pron d 17. sep.

A,18.	C,24.	B,32.	
D,3.	E,4.	F,6.	G,8.

THEOR. 19. PROPOS: 21. xix.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A , & B,duo medij proportionales C,D.Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres E, F , G , minimi in ratione A , C, D, B, Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; [e] erunt E , & G,plani similes:sint ipsius E,latera H , I , ipsius vero G , latera illis proportionalia K,L.Et quia E, F, G , cum minimi sint in ratione A , C , D , [f] æque metiuntur ipsos A,C,D, eiusdem rationis cum illis, metiantur per M.Eo e 20.oct. f 21. sep

A, 24.	C. 72.	D, 216.	B, 648.		
E, 1.	F, 3.	G, 9.			
H, 1,	I, 1.	M, 24.	K, 3.	L, 3.	N, 72.
A, 8.	C, 12.	D, 18	B, 27.		
E, 4,	F, 6.	G, 9.			
H, 2.	I, 2.	M, 2.	K, 3,	L, 3.	N, 3.

dem-

a 21.sep. demque modo,[a] quia E, F, G, minimi æque metiuntur C, D, B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; [b] ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus est autē E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I: nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo, A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, multiplicātes F, faciūt C, & D, vt ostē-

b 9.pron

A, 24.	C, 72.	D, 216.	B, 648.
	E, 1.	F, 3.	G, 9.
H, 1. I, 1.	M, 24.	K, 3. L, 3.	N, 72.

A, 8.	D, 12.	D, 18.	B, 27.
	E, 4.	F, 6.	G, 9.
H, 2. I, 3.	M. 2.	K, 3. L, 3.	N. 3.

c 18.sep. dimus; [c] erit C, ad D, vt M, ad N: [d] Sunt autem C, & D, in
d 17.sep. eadem ratione, in qua E. & F; quod N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propos. 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K. vel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N, & permutando H, ad I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera, H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quam ob rē si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

DVO exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, vnitatem E, esse planum numerum, & vnitates H, I, eius latera, licet impropriè, vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatē a numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quod idem continget in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici; cuiusmodi sunt etiam A, B, in eodem priori

exem-

exemplo. Hoc autem est absurdum, cum Euclides propositionẽ generaliter proponat, eãq; sine vlla exceptione demõstret.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xx.

SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autẽ sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum esse. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; a erunt A, & C, plani similes. Quare existente A, quadrato, erit & C, ei similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 9. B, 54. C, 324. a20.oct.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxj.

SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus sit cubus. Dico & quartum D, cubum esse. Cũ enim inter A, & D, cadant duo medij proportionales B, C; b erunt A, & D, solidi similes. Quare existente A, cubo, erit & D, illi similis, cubus. Quam ob rem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125. b21.oct.

SCHOLIVM.

HAEC est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio praecedentium duarum propositionum, quam qui diligenter examinare velit, inueniet sane mancam esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamuis non quibuscunque lateribus vnius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia, dummodo quibusdam lateribus vnius proportionalia sint quadam alterius;

Iure optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso, atque omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus, satis est, vt duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12, exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiamsi prior sit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, immo omnino negare, posteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc est, inter se quoque æqualia, atque adeo esse quadratum: quemadmodum etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri nõ reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione vlla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se æqualia? Item dicendum est de solidis similibus. Quopropter vtramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus: Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D. latere quadrati A, cum D, ex defin. in se faciat A; erunt D, & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab vnitate continue proportionales, eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; atque adeo cum inter numerum A, eũdem, & tam numerum C, quam vnitatem, cadant medij proportionales multitudine æquales, nimirum vnus; cadent quoque totidem, ex theor. 3, scholij propos. 10. huius lib. inter vnitatem, atque C, numerum, nimirũ vnus, qui sit E. Quoniam igitur vnitas & E, C, numeri sunt continue proportionales; producetur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit ex defin. cuius latus E.

A, 36.	*B*, 48.	*C*, 64.
D, 6.		*E*, 8.
vni-	*tas.*	

ALITER

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipsum A, & F, ipsum C, aeque, ex iis, quae ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniã extremi D, F, minimorũ trium numerorũ, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem & A, quadratus, ex hypothesi; [a] cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia vero est ex aequo, vt A, ad C, ita D, ad F; & permutando, vt A, ad D, ita C; ad F; [b] cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum; [c] metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, metitur; ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. [d] Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quòd conuertẽdo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, vt C, ad F; Ac proinde L, & C, aequales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

A, 36.	B, 48.	C, 64.	a 11. oct.
G, 18.		H, 32.	
D, 9.	E, 12.	F, 16.	
L, 64.	K, 8.	I, 4.	

b 8. oct.

c 7. oct.

d 11. oct.

ALITER. [e] Quoniam A, & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C; ita vt sit D, ad E, sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se, [f] erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E; cadatque inter D, & E, medius proportionalis H, [g] cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint cõtinue proportionales; [h] idẽ numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem

e 20. oct.

A, 36.	B, 48.	C, 64.	f 20 sep.
H, 6.		I, 8.	
D, 3. E, 12.		F, 4. G, 16.	

g 8. oct.

A, 36.	B, 48.	C, 64.	
H, 6.		I, 8.	h 20. sep.
D, 6. E, 6.		F, 8. G. 8.	

numerum O, quoties H, ipsum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: sit quoque P, cubus ipsius O.[a] Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est, L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiusdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam sint D, M, L, H; erit P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P. cubus sit, ex constructione, cubus quoque erit D. a 12. oct.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxij.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; sitque A, quadratus. Dico & B, esse quadratũ. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D; [b] cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, videlicet E; [c] cadet quoque inter A, & B, medius vnus, qui sit F. Quia igitur tres numeri sunt continue proportionales A. F, B; & A, primus est quadratus; [d] erit & B, tertius, quadratus. Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum. b 11. oct. c 8. oct. d 22. oct.

A, 36.	F. 48.	B. 64.
C, 9.	E, 12.	D, 16.

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, [e] essent ambo priores numeri habentes proportionem. quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod est absurdũ. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportionẽ non habent, quã quadratus ad quadratũ. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128, &c. quadrati. Primo enim 4. existẽte quadrato, [f] esset & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. & c. q̃ est absurdũ. [g] Nã inter 4. & 8: & inter 8. & 16 & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cũ tamẽ in scholio prop. 8. huius li. demõstratũ sit, inter numeros duplæ proportionis quosuis nõ posse cadere mediũ proportionalem. e 24. oct. f 24. oct. g 11. oct.

SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum.
a 11. oct. Si enim haberent, a caderet inter eos medius proportionalis. b Igi-
b 8. oct. tur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis. quod fieri non posse, demonstratum a nobis est in scholio propos. 8. huius lib.

xxiij. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubũ, sitq; A, cubus. Dico & B, cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D: c cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E, F: d cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus: e erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

c 12. oct. / d 8. oct. / e 23. oct.

A. 8.	G, 12.	H, 18.	B, 27.
C, 64.	E, 96.	F, 144.	D, 216.

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, f essent ambo priores numeri ha-
f 25. oct. bentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.

xxiiij. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT

SINT plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B, sint plani similes; a cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat. a18.oct.

A,20.	C,30.	B,45.
D,4.	E,6.	F,9.

A,20.	C,30.	B,45.
D,4.	E,6.	F,9.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. b *Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit vnus medius proportionalis: Et est, vt C, ad D, ita A, ad B;* c *cadet quoque medius proportionalis inter A, & B,* d *Quare A, & B, plani similes sunt.* b11.oct. c8.oct. d20.oct.

A,8.	B,18.
C,16.	D,36.

EX hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes, quod est absurdum ponuntur enim non similes.

THEOR. 25. PROPOS. 27. XXV.

SIMILES solidi numeri rationem ha-

bent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A,B. Dico esse, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. a19.oct. Quia enim A,B, sunt solidi similes;[a] cadent inter eos duo medij proportionales, qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E,F,G,H, minimis in continua proportione A,C,D,B; erunt extremi E,H, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H; constat ita esse A, ad B, vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

A,240.	C,360.	D,540.	B,810.
E,8.	F,12.	G,18,	H,27.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI enim A,B, proportionem habeant inter se, quã cubi C,D. Dico A, B, solidos esse similes.

A,16.	*B,54.*
C,64.	*D,216.*

b12.oct. c8.oct. d21.oct. *Nam cum sit A, ad B, vt C, ad D;* [b] *cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales;* [c] *cadent quoque inter A, B, duo medij.* [d] *Sunt ergo A, & B, solidi similes.*

EX his omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, e18.oct. [e] *caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non posse, iã dudũ ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadem ratione nõ erunt similes solidi, cũ inter eos cadere non possint duo medij proportionales. Nam alias caderent quoque duo medij inter minimos earundẽ proportionum numeros.* f8.oct. *Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel*

certe

certe binario tantum inter se distent, vt in scholio praedicto traditum est; inter quos certum est, non posse intercipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

SIMILITER nec duo quiuis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus, latera habet solummodo vnitatẽ, & seipsum, quamuis impropriè. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1.19. & 1.23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quiuis vero numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantum habet duas vnitates, & se ipsum. Vt hi numeri solidi. 29. & 47. latera habent 1.1. 29. & 1.1. 47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est, ea non posse esse proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo huiusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani, vel solidi similes; [a] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter se primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter se primi, cũ nullus numerus illos omnes, tanquã cõmunis mensura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erunt continuè proportionales, vt in scholio propos. 24. lib. 7. demonstrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi. quod absurdum est. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi. a 18 & 19. oct.

EX his sequitur, si duo numeri sint plani, vel solidi similes, quorum minor sit primus, minorem numerare maiorem. Nam si eum non numeraret; [b] essent duo propositi numeri inter se primi: ac proinde, vt proximè ostendimus, non possent esse plani, vel solidi similes. quod absurdum est, & cõtra hypothesim. Verum hoc ostensiuè quoque ita demonstrabimus. Sint primum duo numeri plani similes A, B, sitq; A, minor, primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur plani si- b 31. sep.

A,3.			B,48.	
C,1.	D,3.	E,4.	F,12.	

A,3.	B,48.	
C,1.	D,3. E,4.	F,12.

miles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, sint C, vnitas, & numerus D, ipsi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter C, vnitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur primum numerum A: sint E, F, latera numeri B, lateribus C, D, proportionalia, ita vt sit C, ad E, vt D, ad F.

a19.sep. *Erit igitur permutando C, ad D, vt E, ad F.* [a] *Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertiũ: Fit autem ex C, vnitate in F, ipsemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E.*

b4.pro. [b] *Quare D, ipsum F, metietur:*

c4.pro. [c] *Metitur autem F, ipsum B, quod B, gignatur ex E, in F,*

d11.pro. [d] *Igitur & D, id est, A, illi æqualis, eundem B, metietur, quod est propositum.*

HINC *Perspicuum est, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse planos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cum ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed compositi: quod est contra hypothesim.*

SINT *deinde duo solidi similes A, B, sitque A, minor primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cum A, & B, sint solidi similes, habebunt latera proportionalia. Cũ ergo latera numeri primi A, sint B, C, vnitates, & numerus D, ipsi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter vnitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur numerum primum A:*

A, 3.		B, 24.			
B, 1.	C, 1.	D, 3.	E, 2.	F, 2.	G, 6.

sint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt sit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G.

Quia igitur est C, ad F, vt D, ad G; erit permutando C, ad

e19.sep. *D, vt F, ad G.* [e] *Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium: Fit autem ex C, vnitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo*

f4.pro. *numerus G, fiet ex D, in F.* [f] *Quare D, ipsum G, metietur.*

g4.pro. [g] *Metitur autẽ G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B.*

h11.pro. [h] *Igitur & D, hoc est, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod est propositum.*

ATQVE

ATQVE ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proxime ostendimus. Cum ergo & se ipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi, quod est contra hypothesim.

ITAQVE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel superparticularem, vel superbipartientem; vel certe duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus; erunt illi ipsi per ea, quæ tradita sunt, plani seu solidi non similes.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter vero non quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes, [a] haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Existente igitur 16. quadrato, [b] esset & 20. quadratus; quod est absurdum. ponitur enim non quadratus. a 26.oct. b 24.oct.

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter vero non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. & 40. Si enim essent solidi similes, [c] haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus sit, [d] esset & 40. cubus. quod est absurdum. ponitur enim non cubus. c 27.oct d 25.oct

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

j.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A,B,se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicās enim A,se ipsum faciat D, quadratū. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D,& C, [a] erit vt A, ad B, ita D,ad C. At inter A,& B, cum sint plani similes, [b] vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter D,& C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt sint continuè proportionales D,E, C. Itaque cum tres D,E, C, continue sint proportionales, sitque primus D,quadratus, ex constructione; [d] erit quo-

a 17. sep.
b 18. oct.
c 8. oct.
d 22. oct.

A,6. B,54.
D,36. E,108. C,324.

que

que C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C;[a] erit vt A, ad B, ita D, ad C.[b] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis.[c] Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet;[d] Ac propterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 6.	B, 54.
D, 36.	C, 324.

a 17. sept.
b 11. oct.
c 8. oct.
d 20. oct.

SCHOLIVM.

EX his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

DVO quadrati A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratum. Cum enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati;[e] erit C, ex eis productus, quadratus.

A, 4.	B, 25.
C, 100.	

e 1. non.

II.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes

faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; sitque A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum: a erunt A, & B, similes plani: b atque adeo inter eos vnus medius cadet proportionalis, videlicet D. c Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.

A, 9. D, 12. B, 16.
C, 144.

a 2. noni
b 18. oct.
c 22. oct.

III.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, nō quadratum; sitque A; quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.

A, 4. B, 20.
C, 80.

IIII.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multiplicātes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nā si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitq; A, quadratus, esset & B, ex theor. 1. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20.
C, 180.

SI

THEOR. 3. PROPOS. 3 iij.

SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D: a metietur C, ipsum D, per C: b Metitur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirũ denominata à C; Ac proinde c vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; d metietur D, ipsum A, per C. Metiebatur autẽ & C, ipsum D, per C. Eadẽ ergo pars, est C, ipsius D, quæ D, ipsius A; e ideoq; vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atq; adeo inter vnitatẽ & numerũ A, duo medij proportionales cadũt numeri C, D. f At quia A, ipsum B, metitur per A, quod A, seipsum multiplicans fecerit B; g metitur vero & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; h Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; i cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continue proportionales, & A, primus sit cubus, k erit quoq; E, quartus cubus. Si cubus igitur numerus se ipsum multiplicãs, &c. Quod erat demonstrandum.

	A, 8.	
E, 16.	D, 4.	
F, 32.	C, 2.	
B, 64.	Vnitas.	

a 7. pron. b 5. pron. c 20. def. d 7. pron. e 20. def. f 7. pron. g 5. pron. h 20. def. i 8. octa. k 23. oct.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C,
a 3.noni cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D;[a] erit que D. cubus. Quoniam vero A, mul
b 17.sep tiplicans A, & B, fecit D, & C;[b]
c 12.oct. erit vt A, ad B, ita D, ad C.[c] At inter A, & B, cubos duo medij proportio-
d 8.oct. nales cadunt.[d] Igitur & inter D, & C, duo medij propor
e 23.oct. tionales cadent;[e] Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubũ numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 27.
D. 64. C, 216.

V.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicãs faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum fa-
f 3.noni ciat D;[f] qui cubus erit. Quoniã igitur A, multiplicans A, & B, fecit D,
g 17.sep & C,[g] erit vt A, ad B, ita D, ad C;
h 12.oct. [h] At inter D, & C, cubos duo cadũt
i 8.Oct. medii proportionales.[i] Totidem igitur & inter A, & B,
K 22.oct cadent;[K] Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A, 8. B, 27.
D, 64. C, 216.

SCHOLIVM.

EX his & hæc, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I.

SI cubus numerus non cubum numerũ multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus;[l] & multiplicatus B, cubus erit, quod non ponitur.

l 5.noni

A, 8. B, 20.
C, 160.

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus, [a] & factus C, cubus erit. quod est contra hypothesim. A,8. B.17. C,136. a 4 noni

THEOR. 6. PROPOS. 6. vi.

SI numerus seipsum multiplicans cubũ faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubũ. Dico & A, cubum esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex iis, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicãs numerum quempiam A, facit cubum C; [b] erit & A, cubus. Quare si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum. A,8. B,64. C,512. b 5. noni

SCHOLIVM.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrant C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: [c] Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt. [d] Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit; [e] cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales. [f] Atque adeo existente B, cubo, et A, cubus erit. Verum nostra demonstratio breuior est, & planior, vt perspicuum est. A,8. B,64. C,512. c 12. oct. d 17. sep. e 8. oct. f 23. oct.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vii.

SI cõpositus numerus numerum aliquẽ

multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum enim A, sit compositus,[a] metietur eum, preter vnitatem, numerus aliquis: metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito,[b] multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

a 13. def

b 9. pro.

A, 6. B, 11. C, 66.
D, 2. E, 3.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

viij.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidem B, ab vnitate esse quadratum, & vnum intermittentes omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M: septimum vero F, cubum simul, & quadratum, & quinque intermittētes omnes, nimirum M. Quoniam, n. est vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas nume-

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

rum

rum A,& numerus A,numerum B: a Metitur autem vnitas numerum A,per A.Ergo & A,ipsum B, per A, metietur; b Atq. adeo A,multiplicās A,ipsum B,producet.Quare B,quadratus est.Quia vero tres deinceps proportionales sūt B,C,D, & est B,quadratus; erit & D,quadratus.Eadem ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D,E,F,cum D,sit quadratus, d & F, quadratus erit, Nec non & omnes vnum intermittentes. a 5.pron b 9.pron c 22.oct. d 22.oct.

RVRSVS quia est vnitas ad A,vt B,ad C, æque metietur vnitas numerum A,& numerus B,numerum C. e Metitur autem vnitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A,metietur, f atque adeo B,ipsum A,multiplicās procreabit numerum C.Quare cum A,seipsum multiplicans faciat B, multiplicans vero B,faciat C, vt est ostensum, erit C,cubus. Quia vero quatuor deinceps proportionales sunt C,D,E,F,& est C,cubus, g erit & F,cubus.Eodem argumento, assumptis quatuor deinceps proportionalibus F,G,H,I, cum F,sit cubus, h & I,cubus erit,atque omnes semper duos intermittentes. e 5.pron f 9.pron g 23.oct. h 23.oct.

POSTREMO quia F,septimus ab vnitate ostensus est quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M,septimus ab F,intermissis nimirum quinque G, H, I, K, L,cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint,&c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HOC theorema potest quoque hoc modo proponi.

SI sint quotcunque numeri ab vnitate cōtinue proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio,quinto, septimo,nono,vndecimo,&c.sunt quadrati. Omnes autem, qui sequūtur proxime numeros positos in locis,tertio,sexto,nono,duodeci-

mo,

ſtratum eſt. Quod vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati ſint, ita perſpicuum fiet. Cum tres continue propor

Vnitas. A,4. B,16. C,64. D,256. E,1024. F,4096.

tionales ſint A,B,C; ſitque A, quadratus; a erit & C, quadratus. Eodemque modo, aſſumptis tribus continue proportionalibus C,D,E, cũ C, ſit quadratus; b & E, quadratus erit. Omnes igitur A,B,C,D,E,F, quadrati ſunt. Idem oſtẽdemus, ſi plures numeri ſint cõtinue proportionales. a 22. oct. b 22. oct.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quod enim quartus ab vnitate, & oẽs

Vnitas. A,8. B,64. C,512. D,4096. E,32768. F,262144.

duos intermittentes, cuiuſmodi ſunt C, & F, ſint cubi, c iam eſt demonſtratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi ſint, ſic oſtendemus. Cum ſit vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: d Metitur autem vnitas numerum A, per ipſummet A. Igitur, & A, ipſum B, per ſeipſum metietur; e Atque adeo cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B, procreabit. f Quare B, cubus eſt. Quoniam vero quatuor continue proportionales ſunt A,B,C,D, eſtque A, cubus, g & D, cubus erit. Eademque ratione, aſſumptis quatuor deinceps proportionalibus B,C,D,E, cum B, cubus ſit: h & E, cubus erit: Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi ſunt. Non ſecus demonſtrabimus, omnes cubos eſſe, ſi plures continue proportionales fuerint. Quocirca, ſi ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat. c 8. noni d 5. pro. e 9. pro. f 3. noni g 23. oct. h 23. oct.

SCHOLIVM.

NON demonſtrauit Geometra, ſi numerus, qui poſt vnitatem, ſit cubus ſimul & quadratus, & reliquos omnes eſſe cubos ſimul, & quadratos; quia perſpicue hoc ipſum ex demonſtratis colligitur. Nam ſi proximus vnitati ſit cubus ſimul, & quadratus: qua parte eſt cubus, ea ratione oẽs reliqui cubi erũt; qua vero parte eſt quadratus, ea ratione &

reliqui

reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

VERVM tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicãs facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicãs B, facit C, suntq;

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

A, B, quadrati; erit & C, quadratus, ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, suntque A, C, quadrati; erit ex eodem scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps: cum ex illo scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia. n. ex scholio propos 10. lib. 8. cubus A, seip-

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

a 3. noni *sum multiplicans facit B;* [a] *erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, suntque A, B, cu-*
b 4. noni *bi;* [b] *erit & C, cubus. Rursus quia ex eodem scholio, A, mul-*
c 4. noni *tiplicans C, facit D, suntque A, C, cubi;* [c] *erit quoque D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex eo scholio, A, multiplicans D, gignat E; & multiplicans E, procreet F, &c.*

x. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque

alius

alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A,B,C,D,E,F,G,H,I,&c.& primum A, proximus vnitati non sit quadratus. Dico nec alium vllum esse quadratum, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, hoc est, præter B, D, F, H. &c. Si.n.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16, E,32. F,64. G,128. H,256. I,512. K,1024. L,2048. M, 4096.

præter hos alius est quadratus, sit quadratus E.[a] Cum ergo & D, sit quadratus; sitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E:[b] sed B, tertius ab vnitate est quadratus. [c] Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos quadratum esse. — a 8.noni; b 8.noni; c 24.oct.

SED iam A, proximus vnitati nō sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. [d] Cum ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertēdo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: [e] Sed C, est cubus, cum sit quartus ab vnitate. [f] Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit..quod est contra hypothesim. Non igitur D, cubus est. Quod si E, credatur esse cubus; [g] cum & C, cubus sit, sitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; existen te C, cubo, [h] erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autē ostensum est duos D, & E, inter duos cubos — d 8.noni; e 8.noni; f 25.oct.; g 8.noni; h 25.oct.

C,& F,cubos non esse, ita quoque eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos,inter duos cubos,esse cubos.Si igiturab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

NON est autem necesse, si numerus, qui post vnitatẽ, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubũ simul,& quadratum,præter septimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes;cum aliquando tertius ab vnitate,aliquãdo vero quartus possit esse cubus simul,& quadratus,non existente primo ab vnitate cubo simul,& quadrato.

SIT enim primum A,qui post vnitatem,cubus quidem, non autem simul & quadratus.

Vnitas. B,8. B, 64.

Dico B, tertium esse cubum simul & quadratum;cubum quidem,[a] quod primo existente cubo,omnes cubi sint,[b] quadratum vero,quod tertius sit ab vnitate.

a9.noni
b8.noni

SIT deinde A,post vnitatem quadratus quidem,non autem simul & cubus.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

Dico quartum C, esse cubum simul & quadratum;[c] Cubum quidem, quod quartus sit ab vnitate; quadratum vero,[d] quod primo existente quadrato, omnes sint quadrati.

c8.noni
d9.noni

SIT postremo A,post vnitatem neque cubus,neque quadratus. Dico nullum alium esse cubũ simul & quadratũ, præter septimum F,& quinque intermittentes omnes.Cum

Vnitas. A,6. B,36. C, 216. D, 1296. E,7776. F, 46656.

enim primo non existente quadrato,[e] nullus alius quadratus sit,præter tertiũ ab vnitate,& vnum intermittentes omnes,cuiusmodi sunt,vt in scholio propos.8. huius lib. docuimus,tertius,quintus,septimus,nonus,vndecimus, decimustertius,decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, etc.Primo autẽnon existente cubo,[f] nullus alius sit cubus, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt,vt ex eodem scholio apparet,quartus,septimus, decimus,tertiusdecimus,decimussextus,decimusnonus,etc.

e 10.noni.
f 10.noni.

perspi-

perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de ceteris. Nam in hac loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.

THEOR. 11. PROPOS. 11. xi.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales A,B,C,D,E,F,G. Dico quemlibet minorem,

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A,B,C,D,E,F,G. Cum enim sit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D: (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) [a] æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum G: [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipsummet D: Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipsum F, per A, quod sit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipsum G, per F, cum sit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat ostendendum.

a 20. def. b 5. pro.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex his, quantum abest maior numerus a minore metiente, tantum distare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorē metitur; propterea quod eadem esse debet proportio minoris ad maiorē, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt

Vnitas, A,3. B,9. C,27. D,81. E, 243. F, 729. G, 2187.

ex demonstratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per seipsum, &c. quia tam inter B; & F, quam inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quam inter vnitatem & C, duo interiecti sunt numeri.

HINC rursus efficitur, quemlibet numerum, qui se ipsum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo distat, quantum ipse ab vnitate: Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum a maiore distat, quantum minor ab vnitate, propterea quod si numerus numerũ metiens multiplicet eum, per quem metitur, [a] producitur ille, quem metitur. Ergo C, seipsum multiplicans gignet F, cum F, tantum absit a C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipsum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque B, multiplicans D, faciet eundem F; quod D, ipsum F, metiatur per B, &c. & sic de reliquis.

[a] 9. pro.

xj. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

SINT ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D. Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimũ D, metiri quoq; A, proximũ vnitati. Metiatur.n. numerus primus E, ipsum D. Dico eundẽ E, primũ metiri etiã numerum A, vnitati proximũ. Si nãque nõ metitur ipsum A: [b] erit E, cũ primus sit, ad A, primus: hoc est, A, & E, inter se primi erũt. Metiatur

[b] 31. sep

E, ip-

E,ipsum D,per F,a atque adeo E,multiplicans F,faciat D. a9.pron
Quia vero & A,ipsum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D,vt in scholio præcedētis propos. ostendimus;producetur idem numerus D,ex A,primo in C,quartum,& ex E,secundo in F,tertium.b Quare erit vt b19.sep
A,primus ad E, secundum,ita F,tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E,sint inter se primi;c ac proinde in sua b23.sep
proportione minimi;d metietur æque A,ipsum F,& E,ipsum C. d21.sep
Metiatur E,ipsum C, per G, e atque adeo E,multiplicans G,faciat C. e9.pron
Quia vero & A, ex scholio eodem præcedentis propos.metiturC,per B,f atque adeo A,multiplicans B,facit C;procreabitur idem numerus C, ex A, f9.pron.
primo in B,quartum,& ex E,secundo in G,tertium.g Erit g19.sep
igitur vt A,primus ad E,secundum, ita G,tertius ad B,quartum.

Vnitas.	A, 10.	B, 100.	C, 1000.	D, 10000.
	E, 5.	H, 20.	G, 200.	F, 2000.

Quapropter cum A,& E, sint inter se primi;h ac propterea in sua proportione minimi; i h23.sep
metietur æque A,ipsum G,& E,ipsum B. Metiatur E,ipsū i21.sep.
B,per H:k ita vt E,multiplicās H,faciat B. Metitur autem k6.pron
& A,ipsum B,per A,atque idcirco A,se ipsum multiplicās facit B,vt ex eodem scholio præcedētis propos. apparet. Gignitur ergo idem numerus B,ex E,primo in H, tertiū, l20.def.
& ex A,medio in seipsum,l Quare erit vt E, primus ad A,secundum, ita A,secundus ad H,tertium. Cum ergo E, m23.sep
& A, inter se primi sint;m ac proinde in sua proportione minimi; n æque metietur E,ipsum A,& A,ipsum H. Quod n21.sep
est contra hypothesim.ponitur enim E,ipsum A,non metiri. Quare falsum est E,ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E,non dicatur metiri ipsum A,semper demonstrabitur E,ipsum A,metiri;Quod est absurdum. Metietur ergo E,ipsum A. Eodem argumento ostendemus quoscunque alios numeros primos ipsum D,metientes metiri quoque ipsum A;Eademque erit ratio si C, vel B, vltimus numerus statuatur.

ALITER. Metiatur E,numerus primus vltimum D. Dico & E,ipsum A,metiri. Si enim non metiatur;o erit E, ad o31.sep

A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sũt, & A, seipsum multiplicans facit B, vt ex scholio propos. præcedentis constat,

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296.
E, 3.

a 27. sep. [a] erit B, ad E, primus, Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt; sit autem C, ex A, in B, per idem scholium præcedentis
b 26. sep propos. [b] erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt; & sit D, ex A, in C, ex eodẽ scholio præcedentis
c 26. sep. propos. [c] erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesim. Metitur ergo E, ipsum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

ITAQVE neque vllus numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiẽs metiri potest vltimum. Si namque metiretur vltimũ, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonstratum est. quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod videtur fieri nõ posse. Nã si quis demonstrare instituat, Socratem esse album, ex eo, quod non est albus, paradoxũ aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cui tamen non absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in alijs nõnullis propositionibus, quæ sequuntur. Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 201. gloriaturque se primum omnium hanc rationẽ demonstrandi reperisse: quod arbitror eum non dicturum fuisse, si diligentius vim huius demonstrationis expendisset, vel certe, si expendit, eam in memoriam reuocasset, quandoquidem ipso longe prior Euclides vsus est hoc etiam demonstrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. est manifestum. Eodem genere demonstrandi vsus est Theodosius lib. 1. sphæricorum propos. 12. vt ibidem monuimus.

CAETERVM ex demonstratis perspicuum est, quemcumque

cumque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum.[a] *Cum enim metiatur proximum unitati; hic autem omnes subsequentes;* b *quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris;* c *manifestum est, quod & ille omnes metiatur.* a 12.no. b11.noni c 11.pro.

THEOR. 13. PROPOS. 13. xiij.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sũt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum autem est E, non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; d metietur quoque ipsum A, vnitati proximum; qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed compositus; e atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium esse, non posse, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; f metietur quoque ille alius primus eundem D; g atq; adeo & ipsum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; h & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipsum

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E --- H --- G --- F ---

d 12.no. e 33.sep. f 11.pro. g 12.no. h 8.pron

a11.noni D,metitur,) metietur D,per E. a Cum ergo quilibet ipsorum A,B,C,metiatur D,per aliquem ipsorum A,B,C,erit E,idem qui aliquis ipsorum A,B,C,quod est contra hypothesim,ponitur enim E, non idem,qui aliquis ipsorum A, B, C. Non igitur F, idem est,qui aliquis ipsorum A,B,C,
b8.pron sed diuersus. Quoniã vero E,metitur D,per F, b metietur vicissim F,ipsum D,per E.Non erit autem F,primus: si.n.
c12.noni sit primus,& metiatur D,vltimum;c metietur & A,proximum vnitati,qui primus est,quod est absurdum. Igitur F,
d33.sep. non primus est, sed compositus;d atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem rursus dico nullum aliũ esse pos

Vnitas. A,5. B,25. C,125. D,625.

E ---- H ---- G ---- F ----

se præter primum A. Si namque alius primus quam A,
e11.pro. metiatur F,cũ F,metiatur D,extremum;e metietur quoq;
f12.noni ille alius primus eundem D;f atque adeo & ipsum A,proximum vnitati, qui primus est.quod est absurdum. Ergo
g9. pro. non alius primus quam A, ipsum F, metitur. Iam vero quoniam E,metitur D,per F;g fiet D,ex E,in F:Fit autem & D,ex A,in C, vt in scholio propos. 11. huius lib.docuimus.Idẽ igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartũ,
h19.sep. & ex E,secundo in F,tertium;h Ac proinde erit vt A,primus ad E,secundum,ita F,tertius ad C,quartum;Metitur autem A,ipsum E,vt ostensum est.Ergo & F,ipsum C,metietur. Metiatur per G.Quoniã igitur F,diuersus ab A,B, metitur C,vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab A, B,& non primum,sed compositum,quem solus A,primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E,diuersus ab A,B,C, metiebatur D, vltimum.

SI enim G,sit idem,qui aliquis ipsorum A, B, metia-
i8.pron. turque F,ipsum C,per G;metietur vtique F,ipsum C,per aliquem ipsorum A, B; i & vicissim aliquis ipsorum A, B,(videlicet is,per quem F,ipsum C, metitur) metietur
K11.noni C,per F. K Cum ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A,B,quod est absurdum.ostensum est enim F, non

esse

esse eundem, quem aliquem ipsorum A,B Non ergo G, est idem qui aliquis ipsorum A,B,sed diuersus.Quoniam autem F, metitur C,per G;a metietur vicissim G , ipsum C,per F. Non erit autem G , primus. Si enim primus sit, metiaturque vltimum C,b metietur quoque numerum primum A,vnitati proximum.quod est absurdum.Non ergo G,primus est, sed compositus,c ac proinde eum aliquis primus metietur,quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quam A , metiatur G, cum G, metiatur C , vltimum , d metietur quoque ille alius primus eundem C,e atque adeo & ipsum A, vnitati proximum,qui primus est.quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A,ipsum G,metietur. f Iam vero quia C,fit ex F,in G,quod F,metiatur C, per G ; Fit autẽ idem C,ex A,in B,vt docuimus in scholio propos 11.huius lib. Fiet idem numerus C,ex A, primo in B , quartum ,& ex F,secundo in G,tertium,g Quare erit vt A , primus ad F, secundum, ita G,tertius ad B , quartum Metitur autem A,ipsum F , vt demonstratum est . Igitur & G , ipsum B, metietur metiatur per H.Quia ergo G,diuersus ab A ,metitur B,vltimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H, ostendemus similiter H,diuersum esse ab A , quemadmodum id ostensum est de numeris F,& G.

a 8.pron

b 12.noni

c 33.sep.

d 11.pro.

e 12.noni

f 9.pron.

g 19.sep.

NAM si H , idem sit qui A , metiaturque G , ipsum B, per H ; metietur vtique G,ipsum B , per A; h Et vicissim A , ipsum B , per G , metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B , per A ; vt constat ex scholio propos. 11. huius lib.erit G, idem qui A , quod est absurdum.ostensum est enim G , non esse eundem , quem A . Non ergo H , idem est, qui A,sed diuersus.i Iam vero quia B,fit ex G , in H. quod G. ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B,ex A,in se, vt in scholio propos. 11. huius lib,docuimus; Fiet idem numerus B,ex H, primo in G,tertium, & ex A,medio in se ipsum. k Quare erit vt H, primus ad A, secundum, ita A , secundus ad G,tertium: At A,metitur ipsum G,vt est demonstratum.Igitur,& H ,ipsum A, metietur, numerum primum.Quod est absurdum, Quare si A , primus est , maximum D , nullus alius numerus

h 8 pron

i 9.pron.

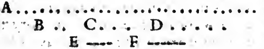
k 20.sep.

metitur, præter ipsos A, B, C. Ac proinde si ab vnitate quotcũque numeri deinceps proportinales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

xiiij. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI minimũ numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim si fieri potest, primus numerus E, diuersus à B, C, D, ipsum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A,



a 9. pron
b 32. sep

per F, [a] multiplicans E. ipsum F, faciet A. [b] Quare singuli B, C, D, alterum ipsorum E, F, metientur: non quidem ipsum E, primum, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A: Quod est absurdũ. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

ADDIT hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentiũ cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compositus.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, in sua proportione minimi, in qua sumantur etiã duo minimi F, G: Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, certe ad alterum eorum compositum esse. Sit enim H, non primus, sed cõpositus:[a] Et sumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & sic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot sunt ipsi A, B, C, D, E. Quoniam igitur, vt constat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propos. lib. 8. numerus A, fit ex F, in M, metiatur autem H, ipsum A,

	A, 16.	B, 24	C, 36.	D, 54.	E, 81.
	M, 8.	N, 12.	O, 18.	P, 27.	
		I, 4.	K, 6.	L, 9.	
H —		F, 2.	G, 3.		

erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum; si vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. erit, ex scholio eiusdem propos. 32. lib. 7. rursus H, compositus vel ad F, vel ad I, Si ad F, habetur propositum: si vero ad I, cum I, gignatur ex F, in se ipsum, erit H, compositus ad F, ex eodem scholio propos. 32. lib. 7. Quod si H, si primus, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. non autem ex scholio, eum metiri ipsum F.

DEINDE metiatur H, non primus secundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit vt prius H, compositus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propositũ, si vero ad N, qui quidẽ fit ex F, in K, erit H, eodẽ modo compositus vel ad F, vel ad K, Si ad F, habetur propositum, si vero ad K, cũ K, gignatur ex F, in G, erit quoq. H, compositus vel ad F, vel ad G. Quod si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.

RVRSVS metiatur H, non primus tertium C; qui cum fiat ex F, in O, erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum, si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L, erit H, compositus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propositum, si vero ad L, cum L, gignatur ex G. in se, cõpositus quoq. erit H, ad G. Quod si H, sit primus, probabimus eodẽ modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsũ G.

[a] 2. oct.

PRAE-

PRAETEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cum fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositum; si vero ad P, qui quidem fit ex G, in L, erit etiam H, compositus vel ad G, vel ad L. Si ad G habetur propositum; si vero ad L; cum L, producatur ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus. Quod si H, primus sit, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

EODEM modo si H, non primus metiatur ultimum F, ostendemus H, compositum esse ad G; Si vero H, primus sit, eum metiri ipsum G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si verò H, metiatur ultimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si denique H, metiatur aliquem, præter primum & ultimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10 theorematibus.

QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quædam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo, perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex iis, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum fecisse a nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

SI fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri AB, & C, quorum AB, diuidatur in AD, DE, EB; Fiatque F, ex C, in AB; Item GH, ex C, in AD; & HI, ex C, in DE; & IK, ex C, in EB. Dico F, æqualem esse numeris GH, HI, IK, hoc est, toti numero GK, ex GH, HI, IK, composito. Quoniam enim C, multiplicans AB, fecit F; a metietur AB, ipsum F, per C, hoc est, AB, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione AD, ipsius GH; & DE, ipsius HI; & EB, ipsius IK, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, quæ AB, ipsius F. Quia vero per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus AB, totius GK, eadem pars est, quæ AD, ipsius GH; erit quoque AB, totus totius GK, pars eadem, quæ AB, ipsius F; b Ac proinde inter se æquales erunt F, & GK. Quod est propositum.

A . . . D . . E . B   C . .
F . . . .
G . . . . . H . . . . I . . K

a 2. pro.
b 4. pro.

II.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur.

NVMERVS enim AB, diuidatur in AC, CB. Dico numeros, qui fiunt ex AB, toto in partes AC, CB, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto AB, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi AB;

D . . . . . .
A . . . . C . . B

erit per theor.1.numerus factus ex D,hoc est,ex AB,in AB, nimirum quadratus ipsius AB,æqualis numeris,qui fiunt ex D,hoc est,ex AB,in AC,& in CB.quod est propositum.

IDEM demonstrabitur, si AB, in plures partes, quam in duas secetur,vt ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E,hoc est,ex AB,in AB,nimirum quadratus ipsius AB,æqualis numeris,qui gignuntur ex E, hoc est,ex AB,in singulas partes AC,CD,DB.

E . . . . . .

A . . . C . . D . B

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & vna parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub partibus continetur, numero, & illi, qui a prædicta parte efficitur, quadrato.

SIT numerus AB, diuisus in AC,CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB,in partem AC,æqualem esse & ei, qui sub partibus AC,CB,continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D,qui dictæ parti AC, æqualis sit;erit ex 1.theorem.numerus factus ex D, hoc est, ex AC, in AB;vel(quod idem est) ex AB,in AC, æqualis numeris factis ex D,hoc est,ex AC,in CB, & ex D,hoc est, ex AC, in AC, quadrato scilicet ipsius AC. Quod est propositum.

D . . . .

A . . . . C . . . . . . B

IIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis,qui a partibus efficiuntur, vna cũ numero plano, qui bis sub partibus cõtinetur.

SIT

SIT numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Est autem numerus, qui fit ex AB, in AC, per 3. theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis est quoque numeris quadratis partium AC, CB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod est propositum.

A . . . . . C . . . . B

V.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

NVMERVS, n. AB, secetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio numero CB, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius CB, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium CD, DB, vnà cum plano numero bis comprehenso sub CD, DB; numero vero comprehenso semel sub CD, DB, vna cum quadrato ipsius DB, æqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex CB, in DB; fit, vt si hic numerus factus ex CB, in

A . . . . . C . . . D . . B

DB,

DB, sumatur pro quadrato ipsius DB, vna cum numero facto ex CD, in DB; numerus quadratus ipsius CB, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CD, vna cum reliquo numero facto ex CD, in DB, semel, & numero ex CB, hoc est, ex AC, in DB, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, æqualis est numerus, qui fit ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipsius CB, æqualis erit quadrato ipsius CD, vna cum numero qui fit ex AD, in DB; hoc est, numerus factus ex AD, in DB, vna cum quadrato ipsius CD, æqualis erit quadrato ipsius CB. Quod est propositum.

VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS enim AB, secetur in partes æquales AC, CB, eique adijciatur numerus BD. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto BD, tanquam vno, nimirum ex AD, in adiectum BD, vna cum quadrato dimidij numeri CB, æqualem esse quadrato, qui fit ex CB, dimidio & adiecto BD, tanquam vno, hoc est, quadrato ipsius CD. Cum enim quadratus ipsius CD, per 4 theorema, æqualis sit quadratis partiũ CB, BD, vna cũ numero his comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratis partiũ CB, BD, vna cum numeris sub CB, BD, & sub AC, BD, comprehensis; numeris autem contentis sub CB, BD, & sub AC, BD, & sub BD, BD, hoc est, quadrato ipsius BD, æqualis sit ex 1. theorem. numerus factus ex AD, in BD; fit, vt si hic numerus factus ex AD, in BD, sumatur pro quadrato

A .... C .... B .. D

partis

partis BD, vna cum numeris factis ex CB, in BD, & ex AC, in BD, quadratus ipsius CD, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CB, vna cum numero facto ex AD, in BD; hoc est, numerus factus ex AD, in BD, vna cum quadrato ipsius CB, æqualis sit quadrato ipsius CD. quod est propositum.

VII.

SI numerus in duas partes diuidatur; Quadratus totius, vna cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, vna cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vna cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partiũ AC, CB, vna cũ numero, qui fit bis ex AC, in CB; si quadratus ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerorum AC, CB, CB, vna cum numero qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

A . . . . . C . . . . . B

VIII.

SI numerus in duas partes diuidatur; Qui fit quater ex toto in vnam partem, vna cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECETVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem esse quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui æqualis sit dictæ parti CB; cum quadratus totius AD, compositi ex AB, & BD, siue dictæ parte CB, sit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum AB, BD, vna cum numero qui fit bis ex AB, in BD, hoc est, quadratis numerorum AB, CB, vna cum eo, qui fit bis ex AB, in CB; Sint autem, ex 7. theorem. quadrati numerorum AB, CB, simul æquales numero bis comprehenso sub AB, CB, vna cum quadrato numeri AC; fit, vt si pro quadratis numerorũ AB, CB, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB, vna cũ quadrato ipsius AC, quadratus factus ex AD, æqualis sit numero, qui fit quater ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

A . . . . C . . . B . . . D

IX.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS sit numerus AB, in partes æquales AC, CB, & non æquales AD, DB. Dico quadratos partium inæqualium AD, DB, duplos esse quadratorum, qui ex AC, dimidio, & ex CD, numero intermedio (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri AD, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis numerorum AC, CD, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CD: Si communis apponatur quadratus partis DB; erunt quadrati partium AD, DB, æqua-

A . . . . C . . . D . . B

les quadratis partium AC, CD, DB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD. Atqui quadrato ipsius DB, vna cum numero bis, qui fit ex CB, in CD, aequales sunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex CB, hoc est, ex AC, & CD. Igitur, si pro quadrato ipsius DB, vnà cum eo, qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati ipsorum AC, CD, erunt quadrati partium AD, DB, aequales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium AD, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus AC, CD, fiunt. Quod est propositum.

X.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quispiã numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero composito ex dimidio, & adiecto.

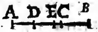
SIT numerus AB, diuisus in partes duas aequales AC, CB, eique adijciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compositi ex toto AB, & adiecto BD, & quadratum adiecti numeri BD, vtrosque simul, duplos esse quadratorũ, qui fiunt ex AC, dimidio, & ex CD, composito ex CB, dimidio, & adiecto BD. Cum enim quadratus ipsius AD, aequalis sit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD; si communis addatur quadratus partis BD; erunt quadrati numerorum AD, BD, aequales quadratis partium AC, CD, BD, vna cum numero bis, qui fit ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipsius BD, vna cũ numero bis qui fit ex CB, in CD, aequales sunt quadrati numerorũ CB, CD; & quadrato ipsius CB, aequalis est quadratus ipsius AC. Igitur si pro quadrato ipsius BD, vna cum numero,

A....C....B..D

qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati numerorum CB, CD, hoc est, numerorum AC, CD: erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis numerorum AC, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui ex AC, CD, efficiuntur. Quod est propositum.

IAM vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis sit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR, si fieri potest, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB, in partem CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC. Quia igitur numerus contentus sub extremis AB, CB, æqualis est quadrato numeri medij AC;

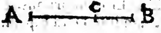


a20. sep. *a erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Est autem AB, maior quam AC, Igitur & AC, maior est quam CB. Ablato iam CD, qui ipsi CB, sit æqualis, erit quoque vt AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est vt AC, ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC,*
b11. sep. *detractum; b erit quoque vt totus AB, ad totum AC, vel vt detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, CD, ipsi CB, æqualis, ad AD, ex AC, residuũ. Quia igitur est vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & est AC, maior quam CD; erit quoque CD, maior quam AD. Ablato ergo DE, qui ipsi AD, sit æqualis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia est, vt totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad*
c11. sep. *DE, ex toto CD, detractum; c erit quoque vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, residuus, hoc est, DE, ipsi AD, æqualis, ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit vt CD, ad DE, ita DE, ad EC; sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior, quam EC; Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, æqualis; & sic deinceps, nec vnquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum; cum numerus non possit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidetur*

ita,

ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis. Quod est propositum.

ALITER. Quoniam numerus AB, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex AB, in CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC; erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC; Ac proinde numerus, qui fit quater ex AB, in CB, vna cũ quadrato ipsius AC, quintuplus erit quadrati partis AC.



Est autem numerus contentus quater sub AB, CB, vna cum quadrato ipsius AC, quadratus; quippe cum æqualis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex AB, & CB, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur sub AB, CB, vna cum quadrato ex AC; & quadratus ex AC,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus AB, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex AB, in CB, æqualis sit quadrato ipsius AC. Quod est propositum.

VERUM hoc idem clarius demonstrabimus ad propos. 29. huius lib.

THEOR. 15. PROPOS. 15. xvj.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habẽtium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirũ A, B, simul ad C; & B, C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestum est ex

A, 9.	B, 12.
C, 16.	
D, 3.	E, 4.

 demon-

A,9. B,12. demonstratione propos. 2. lib. 8. D,
C, 16. seipsum multiplicantem facere A;
D, 3. E, 4. multiplicantem vero ipsum E, face-
re B; atque E, seipsum multiplicantẽ
a24.sep. facere C. [a] Quia igitur D, E, minimi in sua proportione
b30.sep inter se primi sunt; [b] erit & vterque D,E, simul ad quem-
libet illorum primus. Itaque cum tam cõpositus ex D,E,
c26.sep. quam ipse D, ad E, primus sit; [c] erit quoque numerus fa-
ctus ex D,E, tanquam vno, in D, ad eundem E, primus:
Qui autem fit ex D,E, tanquam vno, in D, æqualis est per
3. theorema scholij præcedentis, & numero A, facto ex
D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A,B,
compositi, primi sunt ad E; [d] Ac proinde & ad C, qui fa-
d27.sep ctus est ex E, in se, primi sunt A,B, simul compositi.

DEINDE quia, vt prius, [e] vterque D, E, simul primus
e30.sep. est ad quemlibet ipsorum D,E; efficitur, (cum tam com-
positus ex D,E, quam ipse E, primus
B,12. C,16. sit ad D,) [f] numerum factum ex D,
f26.sep. A, 9. E, tanquam vno, in E, primum esse
D,3. E,4. ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquã
vno, in E, æqualis est per 3. theorem.
scholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in se, & nu
mero B, facto ex D, in E. Igitur & B,C, simul compositi,
ad D, primi sunt, [g] atque adeo & ad ipsum A, qui factus
g27.sep est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi.

POSTREMO quia, vt prius, [h] vterque D, & E, simul
h30.sep. ad quemlibet ipsorum primus est: atque adeo e contra-
rio, quilibet ipsorum D,E, primus est ad compositum ex
D,E, [i] erit quoq; qui fit ex D, in E, ad compositũ ex D, E,
i26.sep. primus; [K] Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eum
K27.sep qui fit ex D,E, tanquam vno, in se, primus erit. Qui autẽ
fit ex D,E, tanquam vno, in se, æqualis est, per 4. theorem.
antecedentis scholij, eis qui fiunt ex
A,9. C,16. D, & E, in se ipsos, vna cum eo qui
B, 12. ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D,
D,3. E,4. in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex
D, & E, in se ipsos, & ex D, in E, bis.
Quoniam ergo duo numeri simul, videlicet compositus

ex ijs,qui fiunt ex D,& E, in se ipsos,& ex eo, qui fit ex D,in E,atque is qui fit ex D,in E, primi sunt ad aliquem ipsorum,nimirum ad eum,qui fit ex D,in E, vt ostensum est, a Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D,& E,in se ipsos,& ex eo,qui fit ex D,in E, atque is,qui fit ex D,in E,inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D,& E, in se ipsos,atque is,qui fit ex D,in E,ad aliquem ipsorum,nimirũ ad eum qui fit ex D, in E, primi sunt, vt ostensum est; b erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs,qui fiunt ex D,& E,in se ipsos,atque is, qui fit ex D,in E,inter se primi. Cum igitur ex D,& E, in se ipsos fiat A,& C; Item ex D,in E,fiat B; erũt A, & C, simul compositi,primi ad B. Quam ob rem,si tres numeri deinceps proportionales,&c. Quod erat ostendendum.

a 20. sep.

b 30. sep.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis,hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales,fuerint minimi omnium eandẽ cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos,esse primos; Videlicet A,B, C, simul ad D; & A,B,D,simul ad C; & A,C,D,simul ad B; & B,C,D,simul ad A. Si enim A,B,C.simul non sunt primi ad D,erũt A,B,C,simul,atque D,compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E,si fieri potest; sumanturque F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D,

A,8. B,12. C,18. D.27.
E ---- F,2. G,3. H ---

numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum, nisi rum D, metietur quoque E, alterum ipsorum F, G, vel certe compositus erit ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. huius libri. Atque idcirco ipsum E; & alterum ipsorum F, G. aliquis numerus metietur: Metiatur eos. H. Itaq; cum H, metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A,
a 11. pro. *B, C, & ipsum D;* a *metietur*

A, 8. B, 12. C. 18. D, 27.
E ---- F, 2. G, 3. H, ----

quoque H, eundem compositũ ex A, B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G: & tam F, quam G, medios numeros B, C,
b 11. pro. *metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib 8.* b *metietur quoque H, me-*
c 10. pro. *dios B, C:* c *ac propterea & compositum ex B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum*
d 12. pro. *compositum ex B, C, ut demonstrauimus:* d *metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se composi-*
e 3. oct. *ti.* e *Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.*

RVRSVS, *si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C, metietur eos, ut prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum, ex scholio propos. 14. huius lib. vel metietur alterum ipsorum F, G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E; & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compositum ex A, B, D;*
f 11. pro. f *metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur, per*
g 11. pro. *coroll. 3. propos. 2. lib 8. medios B, C,* g *metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A,*
h 12. pro. *B, D, & detractum B,* h *metietur quoque H, compositum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, ut constat ex*
i 1. pro. *demonstratione propos. 2. lib. 8.* i *metietur etiam H, alterum*
k 12. pro. *ipsorum A, D.* k *Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extre-*
l 3. oct. *mi inter se compositi.* l *Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compo-*

siti

ita sunt . Ergo primi . Quod est propositum .

NON aliter ostendemus & A,C, D, compositos, esse ad B, primos: nec non, & B,C, D, simul ad A . Eademque ratio est de quotlibet numeris continue proportionalibus.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam. xvij.

SINT primi inter se A,& B. Dico non esse vt A, ad B, ita B,ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C.

Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, [a] atque adeo in sua proportione minimi: [b] ipsi æque metientur numeros B,& C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C: Metitur autē & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . .
B . . . . . .
C . . . .

[a] 23. sep
[b] 21. sep

THEOR. 17. PROPOS. 17.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint: Non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam. xviij.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A,B,C,D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem

A,8. B,12. C,18. D,27. E ----

a23.sep. A,D,cum sint inter se primi, aminimi in sua proportione.
b21.sep. b Igitur æque metientur ipsos B,& E;nimirum A, ipsum B,& D,ipsum E.Atqui est

A,8. B,12. C,18. D,27. E ---- vt A,ad B,ita B,ad C. Ergo cum A,metiatur ipsum
c14.pro. B;& B, ipsum C, metietur;c atque ob id & A,ipsum C, metietur.Et quia est vt B,ad C,ita C,ad D,metitur autem
d11.pro. B,ipsum C;metietur & C,ipsum D. Quare A,metiens ipsum C,d metietur quoque ipsum D.Metitur vero & se ipsum. Igitur A,metitur ipsos A, D, inter se primos.Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B,ita D, ad alium numerum E.Eodem quoque argumento non erit vt D,ad C,ita A,ad alium.Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendū.

xix.

PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri sint A,& B,oporteatque cōsiderare,an inueniri posit tertius ipsis proportionalis,hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum,

A,4. B,7. vt A, ad B. Aut igitur A,B,primi inter se
e16.no. sunt,aut nō.Si sunt inter se primi,e perspicuum est ex demonstratis,nō posse ipsis reperiri tertium proportionalem.Si vero non sunt A,& B,inter se primi; multiplicans B, se ipsum faciat C.Aut igitur A,metitur ipsum C,aut non.Metiatur primum A,ipsum C,per D.Dico ipsis A,B,inueniri posse tertiū

A,4. B,6. D,9. C,36. proportionalem, immo ipsū D, esse tertiū proportionalē.
f9.pron. Cū enim A,metiatur C,per D,f fiet C,ex A,in D:Fit autē ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A,D.æqualis est ei,qui ex medio
g20.sep. B, describitur; g Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B.

SED

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A,B,non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D, ita vt sit A,ad B,quemadmodũ B,ad D. Quoniam igitur est, vt A, ad B,ita B, ad D; a erit numerus contentus sub extremis A,D,æqualis ei,qui fit ex B,medio in se ipsum,hoc est,ipsi C. Quare cum C,fiat ex A,in D; b metietur A,ipsum C, per D:sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A,B,tertius proportionalis,quando A,primus non metitur C,productum ex B,secũdo in se ipsum. Eadem via cõsiderabimus,an ipsis B,& A,inueniri posit alius tertius numerus, ad quem ita sit A,vt B,ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat.

A,6. B,4. D ---- C 16.

a 20. sep

b 7. pro.

PROBL. 2. PROPOS. 19.

XX.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A,B,C,siue deinceps proportionales; siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B. Multiplicans B, ipsum C, faciat D. Aut igitur A,ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primum A,ipsum D,per E. Dico ipsis A,B,C,inueniri posse quartum proportionalem,immo ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E, c fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & tertio cõtinetur; d Ac propterea erit vt A,ad B,ita C,ad E. Quare inuentus est E,ipsis A, B,C,quartus proportionalis.

A,8.	B,12.	C,18.	E,27.	D,216.
A,4.	B,8.	C,9.	E,18.	D,72.

c 9. pron

d 19. sep

SED

SED iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalem. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E; ita vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales sunt,

A,4. B,6. C,9. E---- D,54.
A,3. B,4. C,10. E---- D,40.

a 19. sep. [a] erit numerus contentus sub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, tertium, hoc est, ipsi D. Quare

b 7. pron. cum D, fiat ex A, in E; [b] metietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur non metiri. Quod est absurdũ. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis considerauimus, an possit, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

HAEC quæ proximis quatuor propositionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonstrata sunt, intelligi debent de numeris integris. Nam si de fractis loquamur, potest quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quãuis extremi inter se primi sint. Nã datis duobus, si quadratus numerus secundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. si quadratus numerus secundi 8. nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis $21\frac{1}{3}$. hoc modo. 3. 8. $21\frac{1}{3}$. Quia enim diuisis 64. per 3. fit numerus $21\frac{1}{3}$. producetur numerus diuisus 64. ex multiplicatione Quotientis $21\frac{1}{3}$. per diuisorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus

c 20. sep. *64. factus sit ex medio numero 8. in se, [c] erunt 3. 8. $21\frac{1}{3}$. continue proportionales.*

DATIS autem tribus numeris, si numerus ex secundo in tertiũ genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. si numerus 120. ex secundo in tertiũ genitus diuidatur in primum 9. reperietur quartus proportionalis $13\frac{1}{3}$. hoc modo 9. 6. 20. $13\frac{1}{3}$.

$13\frac{1}{3}$. Cū.n. diuisis 120. per 9. fiat $13\frac{1}{3}$. producetur numerus diuisus 120. ex multiplicatione Quotientis $13\frac{1}{3}$. per diuisorē 9. ex ijs, qua in defin. 15. lib. 7. scripsimus. Fit autem idem numerus diuisus ex secundo in tertium. Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. $13\frac{1}{3}$. proportionales sunt. 219. sep

EX his facile cognoscemus, propositis quotcūque numeris continue proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proporionalis.

THEON, & qui illum sequuntur, inter quos etiam est Federicus commādinus, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi, Aut non deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorū extremi nō primi inter se; Aut deniq. nec deinceps proportionales nec eorū extremi inter se primi. Vbi mirari satis nō possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in alijs quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumque non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati nō sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi; non posse ipsis quartum proportionalem inuenire. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nitūntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis.n. non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cū vtrobiq. proportio sit subdupla? Idē videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet, si demonstrationem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionaliũ, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartũ proportionalem, Si enim

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E — potest inueniri, sit ille

D, ita vt quemadmodũ A, ad B, ita C, ad D, & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi,[a] & ob id minimi.[b] Igitur metientur æque ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At vero & A, seipsũ metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

a 23. sep
b 21. sep

HAEC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E, quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt: Immo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quam tribus A, B, C, cum nõ magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendãt; liquido constat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quoties cunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum, atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, vt B, secundus ad C, tertium. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales,

non

on tamen deinceps, sintque A, & C, primus, & tertius, inter
primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad aliũ numerum, quẽ-
dmodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita
), ad E. Est ergo ex aquo,
t A, ad C, ita C, ad E; A, 4. B, 12. C, 3 D, 9. E ----
ltque adeo vt ipsi osten-
erunt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est
bsurdum. Non ergo fieri potest, vt D, ad E, sit, quemadmodũ
, ad C. Quare apertissime falsum in demonstratione secun-
i membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes,
ui Theonem sequuntur.

PRIMUM vero membrum perspicue & aperte osten-
lunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, &
orum extremi inter se primi; a manifestum est, ex demon- a17.no.
ratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Po-
rema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos, in
um problema absoluimus.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xxj.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposi a multitudine primorum numerorum.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C.)ico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. b Sumpto b38.sep. nim numero DE, minimo, uem A, B, C, metiuntur; aponatur ei vnitas EF. Aut er :o totus DF, primus est, aut on primus. sit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & DF, plures proposita multitudine A, B, C.

A, 2. B, 3. C, 5.
30. 1
D---------- E . F

SED iam non sit primus) F. c Metietur ergo eum c33.sep. liquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum ulli ipsorum A, B, C, eundem le. Si namque G, sit idẽ, qui ius ipsorum A, B, C; metian-

A, 3. B, 5. C, 7.
105. 1
D------------ E . F
53.
G ------

tur au-

tur autem A,B,C,ipsum DE;& G,eundem DE.metietur,
[a] 11.pro. Quare G,metiens totum DF,& detractum DE, [a] metietur quoque EF,reliquum,numerus vnitatem.Quod est absurdum. Ergo G,primus non est idem, qui vnus ipsorum A,B,C; Ac proinde inuenti sunt primi numeri A,B,C,G, plures proposita multitudine primorum numerorum A,B,C. Eademque via plures inuenientur quam A, B,C, G,si sumatur minimus,quem ipsi metiantur,&c. Quocirca primi numeri plures sunt,&c.Qđ demonstrandũ erat.

S C H O L I V M.

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propositis,inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM si primi quotcunque propositi sint A,B,C,inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, videlicet DF,si primus est, vel certe G,qui ipsum DF,metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium sextum inueniemus,& sic deinceps primos numeros,quotquot quis volet,inueniemus.

xxij. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI pares numeri quotcunque componantur:totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri AB,BC,CD. Dico & totum compositum AD,parem esse. Cum.n. AB,B C,CD,sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius A B,& F, ipsius BC; & G,ipsius CD. Quoniam igitur est vt A B, ad E,ita B C, ad F;& CD,ad G;(quod semper sit proportió dupla) [b] erit

A . . . . . B . . . . C . . . . D

E . . . F . . G . . . .

[b] 12.sep.

quoque

quoque vt AB, ad E, ita AD, ad E, F, G, simul. Est autem AB, ipsius E, duplus. Igitur & totus AD, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea AD, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxiij.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par AB, BC, CD, DE. Dico & totum compositũ AE, parem esse. Cũ enim AB, BC, CD, DE, sint impares; differet quilibet vnitate a pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. [a] Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. [b] Igitur & totus AE, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . . . C . . . . . . D . . . . E

a 21. noni.
b 21. noni.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiiij.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar est, AB, BC, CD, componantur. Dico & totum AD, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata vnitate ED, ab impari CD; erit reliquus CE, par. [c] Est autem & AC, compositus ex imparibus AB, BC, multitudine pari-

A . . . . . B . . . C . . . . E . D

c 21. noni.

a 21. noni. bus, par.[a] Igitur & AE, compositus ex paribus AC, CE, par erit. Quare addita vnitate E D, totus A D, impar erit, cum impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat vnitate.[b] *Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; cum à pari sola vnitate differat. Quod est propositum.*

b 21. noni.

XXV. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero AB, detrahatur par C B. Dico & reliquum AC, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius AB, aut maior quã dimidia pars, vel minor. Sit primum dimidia pars Cum igitur ipsi CB, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia, erit & AC, numerus par.

A,.....C......B

SED iam C B, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius AB. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione, sit D B, dimidia pars ipsius A B, & E B, dimidia ipsius CB. Itaque cum sit vt AB, ad DB, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium; erit permutando vt AB, ad CB, ita DB, ad EB; & diuidendo vt AC, ad CB ita D E, ad E B; Rursusque permutando, vt AC, ad DE, ita CB, ad EB. Atqui CB, ipsius EB, duplus est: Igitur & AC, ipsius DE, duplus erit; Ac propterea AC, cum bifariam diuidatur, (quod DE, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

A.....C. D. .E.... B

A...... D... C..E .. B

SCHOLIVM.

FACILIVS demonstrabimus hanc propos. ducendo ad impossibile, hoc modo. Si AC, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta vnitate A D, erit reliquus DC, par. A . D .... C ...... B

[a] *Igitur compositus DB, par quoque erit: ac proinde, addita vnitate AD, totus AB, impar fiet, quod est absurdum, cum par ponatur.* [a] 21. no-ni.

THEOR. 23. PROPOS. 25. xxvj.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero AB, impar detrahatur CB. Dico & reliquum AC, imparem esse. Detracta enim vnitate CD, ex C B, reliquus sit numerus DB, par. Quia igitur & totus AB, ponitur par; [b] erit & reliquus A D, par. Dempta ergo vnitate C D, reliquus AC, impar erit. Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat. [b] 24. no.

A .... C . . D .... B

THEOR. 24. PROPOS. 26. xxvij.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

EX impari numero AB, impar detrahatur CB. Dico reliquum AC, parem esse. Detracta enim DB, vnitate ex imparibus AB, CB; erunt reliqui AD, CD, pares. Quia ergo ex pari AD, par aufertur CD; [c] erit & reliquus AC, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum. [c] 24. no.

A .... C ...... D : B

THEOR. 25. PROPOS. 27. xxviij.

SI ab impari numero par detrahatur. Reliquus impar erit.

EX impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum AC, imparem esse. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB; erit reliquus DB, par: Ex quo cum detrahatur CB, par; [a] reliquus DC, par quoq; erit; Ac proinde addita vnitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 24. noni.

A . D . . . . C . . . . B

xxix. THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cũ B, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; [b] Atque adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendũ erat.

b 21. noni.

A . . . B . . . .
C . . . .

SCHOLIVM.

EADEM demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A . . B . . . .
C . . . .

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, Parem numerum in se multiplicatum procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur æquales.

A . . . . B . . . .
C . . . .

xxx. THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI impar numerus imparem numerum

mul-

multiplicans fecerit aliquem. Factus impar erit.

EX impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsi B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. [a] Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum. a 23. noni.

A . . . . B . . . . .
C . . . .

COROLLARIVM.

HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

A . . . B . . .
C . . . .

EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eũ metitur.

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; [b] *erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.* b 29. noni.

A . . . . . C . . . .
B . . . .

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; [c] *erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.* c 28. noni.

A . . . C . . . . .
B . . . .

SCHOLIVM.

EX his clarissime quoque demonstrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 14. huius lib. aliter ostendimus; recepimusque nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus A B, in partes A C, C B, ita ut numerus ex A B, in C B, factus, aequalis sit quadrato reliquae partis AC.

A------ C---- B
D --- E --

Aut igitur utraque pars AC, CB, impar est; aut maior AC, impar, & minor C B, par; aut contra, maior AC, par, & minor CB, impar; aut denique utraque pars AC, CB, par. Sit primum utraque pars A C, CB, impar,[a] ideoque totus numerus AB, par.[b] Igitur qui fit ex AB, in CB, par est: qui vero ex AC, in se fit, impar est, ex Coroll. huius propos. 26. Cum ergo numerus ex A B, in CB, genitus ponatur aequalis ei, qui fit ex AC, in se; erit par numerus impari aequalis. quod fieri non potest.

a 22. noni.
b 28. noni.

DEINDE sit AC, impar, & CB, par, ideoque ex scholio propos. 23. huius lib. totus AB, impar.[c] Quia ergo numerus ex AB, impare in parem CB, factus, par est: & numerus ex impare AC, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari aequalis. quod est absurdum.

c 28. noni.

TERTIO sit AC, par, & CB, impar; ideoque ex scholio propos. 23. huius lib. totus AB, impar.[d] Quia ergo numerus ex AB, impare in imparem CB, factus, impar est: & numerus ex pare AC, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari aequalis. quod absurdum est.

d 29. noni.

QVARTO sit utraque pars A C, C B, par. Inuentis igitur, ex scholio propos 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione AC, ad CB;[e] erunt D, E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel uterque impar, vel unus impar, & alter par. Et quia est, ut AC, ad CB, ita D, ad E; erit conuertendo, ut CB, ad AC, ita E, ad D: Et componendo, ut AB, ad AC, ita totus DE, ad D:[f] Est autem, ut AB, ad AC, ita A C, ad C B; quod numerus factus ex AB, in C B, aequalis ponatur quadrato medij A C. Igitur erit quoque ut totus DE, ad D, ita D, ad E,[g] ac proinde nume-

e 24. sep.
f 20. sep.
g 20. sep.

rus,

rus, qui fit ex toto DE, in E, aequalis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus D, E, sectus est in partes D, E, quarum vel utroque impar est, vel una impar, & altera par; ita ut numerus factus ex toto DE, in partem E, aequalis sit quadrato alterius partis D; quod fieri non posse, iam demonstratum est in numero AB, quando utraque pars AC, CB, vel impar est, vel una impar, & altera par. Constat ergo propositum.

THEOR. 28. PROPOS. 30. xxxiij.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATUR impar A, parem B. Dico A, dimidium quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo, ex ijs, quae in antecedente propos. ex Campano demonstrauimus, numerus C, par, Atque adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum A, metiatur B, per C, [a] metietur quoque C, ipsum B, per A; a 28. pron.

Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniã

A . . . . C . . . .
B . . . .

vero est vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodem A, denominata. [b] Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum. b 40. sep.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxiiij.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoque primum esse. Si

enim A, C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D, qui necessario impar erit. Nam si sit par, cum metiatur imparem A; a erit A, factus ex

A . . . . . B . . . .
C . . . . D ---

a 28.no. D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metiens, (est enim C, par, cum dimidium habeat

b 30.no. B.) b metietur quoque numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquẽ numerum primus sit &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad duplum, c primus quoque erit ad quadruplum, qui

c 31.no. dupli duplus est: Et similiter ad octuplum; qui quadrupli duplus est, &c.

XXXV. THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantum.

NVMERI à binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita vnitate, cum A, sit binarius, & B, C, D, E, a binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps propor-

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

d 11.no. tionales, nimirũ in proportione dupla. d Quare A, quemlibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cum omnes sint pares, vtpote dupli à binario: metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per nu-

merum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

QVOD autem iidem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continue proportionales, sitque A; proximus vnitati numerus primus, nimirũ binarius; a nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E; qui cum sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum; Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat. a 13. no.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantum. Sint. n. A, B, C, D, E, F, à binario dupli, qui ex hic demonstratis

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
Γ ---- H ---- G ----

omnes sunt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeo si ordo numerorum à binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantũ, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par, (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod est absurdũ: ponitur namque pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G; pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G; pariter impar erit; Quòd est absurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars unitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G; sunt à binario I, dubli: Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F, ponitur autem, non esse. Quod

est ab-

est absurdum Nullus ergo alius pariter par est tantum, prater eos, qui à binario sunt dupli.

xxxvj. ## THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidiũ habeat imparem: Pariter impar est tantum.

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantum. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem,

A . . . .

metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparẽ. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quod autem idem A, sit pariter impar tantum, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantum; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. a Igitur fit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, b Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autẽ C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca si numerus dimidium habeat imparẽ, &c. Quod demonstrandum erat.

a 19. pron

b 19. sep.

A . . . .
B . . . . .   C . .
D -----   E ----

S C H O L I V M.

ITAQVE si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantũ. Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tãtum, constat ex hac

Impares	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.
Pariter impares tantũ	6.	10.	14.	18.	22.	26.	30.

ex hac propositione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi soli sint pariter impares tãtum, perspicuũ erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum, manifestum est, nullum alium præter ipsos, esse pariter imparem tantum; sed vel esse pariter parem tantum, vel certe pariter parem & pariter imparẽ.

THEOR. 32. PROPOS. 34. xxxvij.

SI par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR numerus A, neque sit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet.

Nam cum dimi- A . . . .
dium habeat parem; metietur eum binarius, par numerus per parem, nẽpe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus esset A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cum in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, a cum impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo vicissim par per imparem, erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter

a 29. no.

par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque à binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

FACILE ex his inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui à binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habēt impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

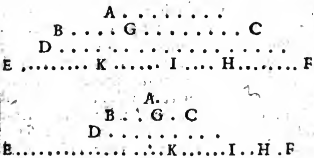
PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

xxxviij

THEOR. 33: PROPOS. 35.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, EF; & ex B C, secundo, & EF; vltimo detrahantur C G, FH, primo A, æquales. Dico esse vt BG, ad A, ita EH; ad A, B C, & D, simul. Detrahatur FI, ipsi B C, & FK, ipsi D, æqualis.



Quoniam igitur FI, æqualis est ipsi B C, & ablatus FH, ablato C G; erit & reliquus IH, reliquo B G, æqualis. Quia vero est vt A, ad BC, ita B C, ad D & D, ad E F; conuertendoque vt EF, ad D, ita D, ad BC, & BC, ad A; Atque

est

A.
B . . G . C
D . . . .
E . . . . K . . . . . . I . . H . F

est KF, ipsi D, & IF, ipsi BC, & HF, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt EF, ad KF, ita KF, ad IF, & IF, ad HF. Diuidendo igitur vt EK, ad KF, ita KI, ad IF, & IH, ad HF; [a] Ac proinde ita etiam erunt omnes EK, KI, IH, ad omnes KF, IF, HF, hoc est, totus EH, ad D, BC, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales KF, IF, HF,) vt IH, ad HF, hoc est, vt BG, ad A; sunt enim BG, & A, ipsis IH, & HF, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat. a 12. sep.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunque numerorũ continue proportionaliũ, si modo primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus a secundo, & vltimo dematur, fiatque vt reliquus secundi ad primũ, ita reliquus vltimi ad aliũ: Erit hic alius summa omnium numerorũ proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota summa.

1.3.9 27.81.243.729.2187.

Inuenietur autẽ quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secũdi: vt liquet ex scholio prop. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniẽdus est, sunt excessus secundi, primus, & excessus vltimi: Vt in exemplo apposito, si primus numerus, nimirũ vnitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1 ita 2186. ad summã omniũ, excepto vltimo, si secũdus numerus 1. multiplicetur per tertiũ 2186. fiet numerus 2186 qui si diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summæ inuentæ 1093. procreabitur summa omnium 3280.

xxxix. THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, vltimum faciat F. Dico F, esse numerum perfectum.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16.
E,31. G ------ 62. H,124. I,248. F ------ 496.
K,31. M,31. L,31. N,465.
O ----- P ----

Quot enim sunt numeri A,B,C,D, tot sumantur ab E, dupli, nimirum E,G,H,I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E,G,H,I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; [a] Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F; ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; [b] ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipsius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G, secundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, sintque reliqui excessus M, N. [c] Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (Cum enim G, duplus sit ipsius E, ablatusque sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E,G,H,I, simul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris; (qui compositus eidem E, per constructionem, est æqualis) erit compositus ex LN, nimirum ipse F, æqualis vnitati, & numeris A,B,C,D,E,G,H,I, simul. Quare cum vnitas,

[a] 19. sep.
[b] 7. pro.
[c] 35. noni.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D.16.
E,31. G -------- 62. H,124. I,248. F ----- 496.
K,31.M,31. L,31.N.465.
O -- ---- P -----

tas, & omnes numeri A,B,C,D,E,G,H,I, metiantur ipsum F;(Cum enim F, factus sit ex E, in D; [a] metietur D, ipsum F; [b] atque adeo eundem F,metietur vnitas, & numeri A,B,C,[c] qui ipsum D,metiuntur. Rursus cum I,ipsum F, metiatur, vt ostensum est, [d] metientur quoque eundem F,numeri E,G,H, [e] qui ipsum I,propter proportionem duplam, metiuntur)& nullus alius numerus ipsum F,metiatur,vt mox ostendemus; Erunt vnitas & numeri A,B,C,D,E,G,H,I,omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cum æqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus. a 7. pro. b 11. pro. c 11. noni. d 11. pro. e 11. noni.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C,D,E,G,H,I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur, si fieri potest,alius numerus O,præter illos,ipsum F, per P; [f] atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F,factus est ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium: [g] ac propterea est vt E,ad P,ita O,ad D. Quoniam vero,cum A, B, C, D, ab vnitate sint proportionales, & A, proximus vnitati primus, [h] vltimum D, nullus alius, præter A,B,C, metitur.: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E,ad P; neque igitur E, ipsum P, metietur. Cum ergo E, primus sit, [i] erunt E, & P, inter se primi; [k] ideoq; in sua proportione minimi: [l] Ac proinde æque metietur E,ipsum O,& P, ipsum D. [m] Nullus vero alius præter A, B, C, ipsum D,metitur. Igitur P idem erit, qui aliquis ipsorum A,B,C.Sit ergo idem, qui B,& quot sunt B, C, D, tot ab E, sumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H; [n] Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H,quartum, qui ex D, secundo in E,tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex f 9. pro. g 19. sep. h 13. octa. i 31. sep. k 23. sep. l 21. sep. m 13. octa. n 19 sep.

a 19. sep. P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, [a] atque adeo erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B. Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum. ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I, Nō igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earũ partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunq; numeri ab vnitate dupli in vnam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continue dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, exclusa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipsa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuẽtus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facile ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 3 Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 7. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16 numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 4 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

LVBET hoc loco demonstrare proprietates quasdam proportionalitatis Geometricæ, quæ nititur admirabilis illa

proprie-

proprietas, quam libro 5. septimo loco, cum de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus. hinc exordientes.

I.

QVOLIBET numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuisus per B, C, faciat quotientes D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiso A, per B, fit Quotiens D: fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium: a erit vt B, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod est propositum. a 19. sep.

A, 48.
B, 8. C, 3.
D, 6. E, 16.

II.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiso, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotientes F, G, H, I. Dico esse, vt B, ad C, ita G, ad F: Et vt C, ad D, ita H, ad G. Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestũ est ex theoremate 1. proxime demonstrato. Cum enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cum duo C, D, diuidentes A, faciant G, H: erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cum duo D, E, diuidentes A, faciant H, I: erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

A, 48.
B, 3. C, 4. D, 8. E, 6.
F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

III.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continue proportionales diuiſo, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales, ſint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales eſſe.

A, 15.

B, 1 C, 2. D, 4. E, 8.

F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.

Quoniam enim per 2. theorema eſt, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc eſt, vt D, ad E, ita H, ad G: Et vt B, ad C, hoc eſt, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F: erunt I, H, G, F, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod eſt propoſitum.

IIII.

SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorum ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet.

SINT quotuis numeri A, B, C, quorum ſumma D: Et totidem alij E, F, G, quorum ſumma H; ſitque vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico eſſe, vt D, ad A, B, C, ſigillatim, ita H, ad E, F, G, ſigillatim.

A, 3. B, 6. C, 20.
D, 29.
E, 6. F, 12. G, 40.
H, 58.

Cum enim ſit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B, ſimul, ad C, ita erit E, F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita

E, F,

E, F, G, simul, hoc est, H, ad G.

QVIA igitur est, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex aequo, vt D, ad B, ita H, ad F.

DENIQVE quia est, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex aequo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod est propositum. Eademque ratio est de pluribus.

V.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; summa priorum per ipsos diuisa sigillatim, faciet eosdem prorsus Quotientes, quos summa posteriorum per ipsos diuisa facit.

NAM, vt in 4. theor. ostensum est, eadem proportio est summae priorum ad primum, quae summae posteriorum ad primum: ac proinde vtriusque proportionis idem denominator erit. Cum ergo ex diuisione antecedentis termini per consequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, si vtraque summa seorsum per primos numeros, quaque per suum, diuidatur. Eademque ratio est, si per secundos, tertios, quartos, &c. diuisio fiat. Constat ergo propositum.

VI.

SI summa quotuis numerorum continue proportionalium per eos sigillatim diuidatur; Et Quotientum summa per ipsos Quotientes; Et horum secundorum Quotientum summa per eosdem secundos Quotientes; & sic deinceps in infinitũ:

procreabuntur alternis ſemper ijdem primi Quotientes ordine conuerſo.

SINT continue proportionales quotuis numeri A,B,C,D, quorum ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotientes F,G,H,I, & horum ſumma K, per eos diuiſa faciat Quotientes L,M,N,O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine conuerſo, hoc eſt, F, & O, eoſdem eſſe: Item G, & N: H, & M: I, & L, &c.

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F,G,H,I, eandem continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A,B,C,D. Et quotientes L, M, N, O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F,G,H,I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quam numeri A,B,C,D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cum ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E, per A, qui ex diuiſione K, per I. Cum ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L. &c. quod eſt propoſitum.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8.
E. 15.
F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.
K, $28\frac{1}{8}$.
L, $1\frac{7}{8}$. M, $3\frac{3}{4}$. N, $7\frac{1}{2}$. O, 15.

VII.

SI ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantiũ, vel deniq; (ſi Quotientũ numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.

SINT primum quotuis numeri multitudine pares con-

$A, 1.\quad B, 2.\quad C, 4.\quad D, 8.\quad E, 16.\quad F, 32.$

$G, 63.$

$H, 63.\ I, 31\frac{1}{2}.\ K, 15\frac{3}{4}.\ L, 7\frac{7}{8}.\ M, 3\frac{15}{16}.\ N, 1\frac{31}{32}.$

$O, 124\frac{1}{2}.$

tinue proportionales A, B, C, D, E, F, quorũ summa G, per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum summa O. Dico summa O, æqualẽ esse numerum, qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, sunt continue proportionales conuerso ordine in proportione A, ad B, erit N, ad M, vt I, ad H.[a] *Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc est, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademque ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in M. Et quoniã per 6. theor. summa O, diuisa per H, I, K, L, M, N, producit eosdem Quotientes conuerso ordine hoc est, summa O, diuisa per H, facit Quotientem N, producetur summa O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.*

[a] 19. sep.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares continue proportionales A, B, C, D, E, quorum summa F, per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum summa M. Dico summa M, æqualem esse numerum genitum ex G, in L, & ex H, in K, & ex I, in seipsum. Quod enim æqualis sit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demõstrabimus, vt prius. Deinde vero quia tres numeri H, I, K, continue proportionales sunt,[b] *erit numerus ex H, in K, genitus, id est, summa M, æqualis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propositum.*

$A, 1.\quad B, 2.\quad C, 4.\quad D, 8.\quad E, 16.$

$F, 31.$

$G, 31.\ H, 15\frac{1}{2}.\ I, 7\frac{3}{4}.\ K, 3\frac{7}{8}.\ L, 1\frac{15}{16}.$

$M, 60\frac{1}{16}.$

[b] 20. sep.

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius latus, siue radix, est medius terminus.

ITAQVE si inueniendi sint quotcunque numeri con-

tinue proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibusuis duobus, qui ab extremis æqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunque continue proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim diuidatur; erunt Quotiẽtes quæsiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorũ summa sit numerus quadratus, cuius latus, siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidem numeri continue proportionales, eorumque summa per eos sigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæsiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atque mirabile sane est, posse reperiri quotcunque numeros continue proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa æqualis sit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distãt, inter se multiplicatis; & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in seipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero producto ex vno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunque, eorumq. summam per vtrumque diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæsitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa æqualis est numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa æqualis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumq. summa 11. per vtrumque diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. *&* $2\frac{1}{5}$. *sunt numeri quæsiti. Habent enim proportionem sesquiquintam datam, & tam eorum summa, quam numerus ex multiplicatione eorum productus, est* $4\frac{1}{30}$.

MINVTIARVM SIVE numerorum fractorum DEMONSTRATIONES.

I.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quã numeratores.

SINT duæ minutiæ AB, CB, eundem habentes denominatorem, & numerator C, sit vnitas. Dico ita esse minutiam AB, ad minutiam CB, vt est numerator A, ad numeratorem C. Quoties. n. vnitas C, continetur in A, toties minutia CB, in minutia AB, includitur;

$$\frac{A,6.}{B,11.} \quad \frac{C,1.}{B,11.}$$

propterea quod minutia AB, diuiditur in tot minutias minutiæ CB, æquales, quot vnitates sunt in A, ita vt quælibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorẽ B.[a] Igitur eadẽ pars est vnitas C, numeri A, quæ minutiæ CB, minutiæ AB; ac proinde est, vt vnitas, C, ad A, ita minutia CB, ad minutiam AB: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutia AB, ad minutiam CB. quod est propositum.

[a] 29. defin.

QVONIAM vero minutiæ sunt fractiones, siue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuspiam numeri, (Neq. enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius vnitatis esse accipiendas; propterea quod falso putant, earum demonstrationes non posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibusuis etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosus lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas afferimus.

SINT ergo data minutia $\frac{6}{11}$. & $\frac{1}{11}$. particula, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius $\frac{1}{11}$. est 4. & $\frac{6}{11}$. sunt 24. perspicuum est, ita esse 4. ad 24. vt est numerator 1. ad numerorum 6. Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.

HANC porro propositionem demonstrabimus propos. 4. in vniuersum de quibuscunq. duabus minutijs eiusdem denominationis, etiamsi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

A, 3.	C, 1.	D, 5.
B, 5.	B, 5.	B, 5.

SIT minutia quæcunque A B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia AB, ad suum integrum. Sumatur minutia CB, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquiualet: quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat.[a] Quoniam igitur est, vt A, ad C, ita minutia AB, ad minutiam CB: Et vt C, ad D, ita minutia CB, ad minutiam DB; erit ex æquo vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, æqualem, ita minutia AB, ad minutiam DB, hoc est, ad integrum, quod est propositum.

a 1. huius.

A, 1.	C, 1.
B, 5.	C, 30.

ALITER. Sit primum datæ minutiæ A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C, sit vnitas; siue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quod tot minutiæ ipsi A B, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A, sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimos; eadem pars erit vni-

tas A, numeri B, qua minutia AB, integri C. a *Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia AB, ad integrum C, quod est propositum.* a 20. def.

DEINDE non sit vnitas numerator A. Sumatur minutia DB, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutia AB; b *Et quia est vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia AB, ad minutiam DB: Et vt D, ad B, ita minutia DB, ad integrum C, vt proxime demonstrauimus; erit ex aequo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad integrum C. Quod est propositum.* b 1. huius.

A, 3.	D, 1.	C. 1.
B, 5.	B. 5.	C, 30.

ITAQVE si data minutia $\frac{1}{5}$. sit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. vbi vides ita esse 18. ad 30. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quęlibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

SIT qualibet minutia AB. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. c *Quoniam enim est, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B; ad suum integrum C; erit permutando; vt A, ad minutiam AB, ita B, ad integrum. Et conuertendo, vt minutia AB, ad A, ita integrũ ad B. Cum ergo integrum C, sit pars denominatoris B, (hoc est, integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore B.) ab ipso denominatore B, denominata; (Cũ n. aeque metiatur vnitas denominatorẽ, & integrum ipsum integrum toties acceptum, quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore) erit quoque minutia AB, numeratoris A, (hoc est, integri toties accepti, quoties est vnitas* c 2. huius.

A, 3.	C, 1.
B, 5.	C. 30.

in numeratore A,) eadem pars à denominatore B, denominata. quod est propositum.

PONATVR *minutia* $\frac{3}{5}$. *esse huius integri 30. cuius* $\frac{3}{5}$. *sunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc est, valet 90. & denominator valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia* $\frac{3}{5}$. *sumitur respectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinque.) liquido constat, 18. esse quintam partem numeratoris, hoc est, trium vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, quæ tres vnitates faciunt 90 partem, inquam, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars est denominatoris, hoc est, quinque vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.*

IIII.

DATAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorē habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propositione ostensum est de duabus minutijs, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonstratur hic de quibusuis minutijs. Habeāt ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico esse minutiam AB, ad minutiam CB, vt est A, ad C, numerator ad numeratorem. a *Quia enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad suum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB; (Nam* b *cum sit, vt C, ad B, ita minutia CB, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB,) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam C B, quod est propositum.*

A, 6.	C, 3.
B, 7.	B, 7.

a 2. huius.

b 2. huius.

DATAE *minutia* $\frac{6}{7}$. $\frac{3}{7}$. *sint huius integri 28 cuius* $\frac{6}{7}$. *sunt 24. &* $\frac{3}{7}$ *sunt 12. vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. vt est numerator 6. ad numeratorem 3.*

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorẽ, vt prior numerus productus ad posteriorẽ.

SINT duæ minutiæ AB, CD: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam AB, ad minutiam CD, vt est F, ad H. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H, a erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, b ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia AB, ad integrum, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H; c erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrum ad minutiã CD, (Nam d cũ sit, vt C, ad D, ita minutia CD, ad integrum, erit conuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiã CD) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam CD. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia AB, ad minutiã CD. quod est propositum.

F, 10.			G, 12.
A, $\frac{2.}{3.}$ B,	✕	C, $\frac{4.}{5.}$ D,	
	H, 15.		

F,	AB.
H.	Integrum.
G.	CD.

a 18. sep.
b 2. huius.
c 18. sep.
d 2. huius.

SI duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiusdẽ, 24. Perspicuũ aũt est, ita esse 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

ITAQVE si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia AB, minutiæ CD, æqualis: si minor, minor: Et si maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.

INTE-

VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summã duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter vero ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT duæ minutiæ AB, CD. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarũ AB, CD, vt est H, ad summam numerorum F, G. a Quoniam n. est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad G; erit componendo, vt summa minutiarum AB, CD, ad minutiam CD, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia C D, ad integrum, ita est G, ad H, (nam b vt minutia CD, ad integrum, ita est C, ad D. c Et vt C, ad D, ita est G, ad H: propterea quod G, D, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H: Et conuertendo, vt integrum ad summã minutiarum A B, CD, ita H, ad summam numerorum F, G, quod est propositum.

F, 10.	G, 12.
A, 2.	C, 4.
B, 3.	D, 5.
H, 15.	

a 5. huius.

b 2. huius.

c 18. sep.

AB, CD.	F, G.
CD.	G.
Integrum.	H.

SINT rursus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. particula numeri 30. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 20. & $\frac{4}{5}$. eiusdẽ 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc summam 44. vt est 15. ex denominatoribus productus ad 12. sum-mam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorẽ, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam AB, ad minutiam AC, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; [a] *erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autẽ D, ad E,* [b] *ita est minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia A B, ad minutiam AC, vt C, ad B, quod est propositum.*

D. 105.	E, 35.
A, 5.	A, 5.
B, 7.	C, 21.

a 17. sep. b 5. huius.

DVAE minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{2}\frac{}{1}$. sint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$ sunt 30. & $\frac{5}{2}\frac{}{1}$. eiusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIAE, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ AB,CD, sitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. [a] *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia AB, ad integrum, vt minutia CD, ad idem integrum. Aequales ergo sunt minutiæ AB, CD. quod est propositum.*

A, 3.	C, 9.
B, 4.	D, 12.

a 2 huius.

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico esse vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum. [b] *Est autem, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum.*

b 2. huius.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico maiorem esse minutiam AB, quam CD. [c] *Cum enim sit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum, & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum, ponatur autem maior proportio A, ad B, quam C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ AC, ad integrum, quam minutiæ CD, ad idem integrum. Maior ergo est minutia AB, quam minutia CD, quod est propositum.*

A, 3.	C, 2.
B, 4.	D, 3.

c 2. huius.

VERVM sit iam minutia AB, maior, quam minutia CD. Dico maiorem esse proportionem A, ad B, quam C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrũ, quam minutiæ CD, minoris ad idem integrum. [d] *Cum ergo sit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D. quod est propositum.*

d 2. huius.

MINVTIARVM $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. *integer numerus sit 24. cuius tam* $\frac{3}{4}$ *quam* $\frac{9}{12}$. *sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ* $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. *At* $\frac{2}{3}$. *eiusdem numeri 24 sunt 16. vbi manifestum est, numerum 18 maiorem esse numero 16. ideoque minutiam* $\frac{3}{4}$. *maiorem esse minutiâ* $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIAE, quarum numeratores eādem proportionem habent, quam denominatores; sunt æquales; Et minutiarū æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator, maiorem proportionem habet, illa maior est: Et maioris numerator maiorē habet proportionem, quam denominator.

SINT duæ minutiæ A B, CD, sitque eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, ut A, ad B, ita C, ad D: a ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est propositum. a 8. huius.

A, 6.	C, 2.
B, 9.	D, 3.

SED sint iam minutiæ æquales AB, & CD Dico ita esse A, ad C, ut B, ad D. b *Erit enim ut A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutādo, ut A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum.* b 8. huius.

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam A B, maiorē esse minutia CD. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D, c *ac propterea maior erit minutia AB, quam CD. quod est propositum.* c 8. huius.

A. 6.	C, 2.
B, 9.	D, 5.

VERVM sit iam minutia AB, maior quam C D. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quàm B, ad D. d *Erit enim maior proportio A, ad B, quam C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod est propositum.* d 8. huius.

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{3}$. partes integri numeri 90. ubi vides minutiam $\frac{6}{9}$. hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{2}{3}$. id est, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{6}{9}$.

id est,

id eſt, 60. maiorem eſſe minutia $\frac{3}{5}$. hoc eſt, numero 54.

X.

DVAS minutias diuerſarum denominationum ad alias duas eiuſdem denominationis illis æquales reducere.

E, 10.		F, 9.
A, 2.		C, 3.
B, 3.	✕	D, 5.
	G, 15.	

DVAE minutiæ AB, CD, habeant diſſimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias EG, FG, quarum numeratores E, F & denominator idem G, eſſe æquales minutijs AB, CD. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; a erit vt A, ad B, ita E, ad G. b Quare minutiæ AB, EG, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G, c erit vt C, ad D, ita F, ad G. d Igitur minutiæ CD, FG, æquales erunt. quod eſt propoſitum.

a 18. ſep.
b 8. huius.
c 18. ſep.
d 9. huius.

XI.

INTEGRVM numerum quemcumque ad dati denominatoris minutiã reducere.

	B, 6.
A, 1.	C, 6.

SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiã cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiam BC, vnitati A, æqualem eſſe. e Quia enim eſt, vt B, ad C, ita minutia BC, ad integrum A: Eſt autem B, ipſi C, æqualis. Igitur & minutia BC, integro A, id eſt, vnitati, erit æqualis. quod eſt propoſitum.

e 2. huius.

DEINDE ſit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam BC, integro A, æqualem eſſe. Supponatur enim integro A, vnitas D, vt fiat minutia AD, tot vnitati-

bus

bus æqualis, quoties vnitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cum ergo minutiarum AD, BC, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, a *ipsæ inter se æquales erunt. Quare cum minutia AD, sit integro A, æqualis, ob denominatorem, qui est vnitas; erit quoque minutia B C, eidem integro A, æqualis. quod est propositum.*

A, 7.	B, 42.
D, 1.	C, 6.

a 8. huius.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia AB, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramque minutiam CB, AD, duplam esse minutiæ AB. Cum enim minutiæ A B, C B, eundem habeant denominatorem; b *erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia CB, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum.*

A, 3.	C, 6.	A, 3.
B, 8.	B. 8.	D, 4.

b 4. huius.

RVRSVS quia minutiæ AB, AD, eundem habent numeratorem; c *erit vt B, ad D, denominator ad denominatorē, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia AD, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum.*

c 7. huius.

DEINDE dimidianda sit minutia AB. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A: Vel numerator A, quādo par est, dimidietur, vt fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtramque minutiam AC, DB, dimidium esse minutiæ AB. Cum enim minutiæ AB, AC, eundem habeant numeratorem; d *erit vt B,*

A, 6.	A, 6.	D, 3.
B, 11.	C, 22.	B, 11.

d 7. huius.

ad C, denominator ad denominatorem, ita AC, ad AB, minutia ad minutiam. Cum ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutia AC, minutia A B, dimidium. quod est propositum.

a 4. huius. *RVRSVS cum minutiæ AB, DB, habeant eundem denominatorem;[a] erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita DB, ad AB, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia DB, minutiæ AB, dimidium. quod est propositum.*

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam datæ minutiæ sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim AB, minutia minutiæ CD, respectu integri numeri E, siue vnitatis E, & valorem huius minutiæ minutiæ exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ FG, respectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rursus H, ex C, in B.

b 2. huius. *[b] Et quoniam est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad suum integrum, nimirum ad minutiam C D, cuius integrum est E:*

c 18. sep. *[c] Item vt A, ad B, ita est F, ad H; quod A, B, ipsum C, mul-*

tiplican-

tiplicantes faciãt F, H: Erit quoque, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad H. Rursus a *quia est, vt C, ad D, ita minutia CD, ad suum integrũ E:* b *Item vt C, ad D, ita est H, ad G; quod B, ipsos C, D, multiplicãs fecerit H, G: Erit quoque vt CD, minutia ad suum integrum E, ita H, ad G. Quoniam igitur est, vt minutia AB, ad minutiã CD, ita F, ad H: Et vt minutia CD, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, vt AB, minutia minutiæ CD, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem AB, minutia minutiæ CD, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quod simplex minutia K, æqualis posita sit datæ minutiæ AB, minutiæ CD; cum eius valorem respectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia simplex K, ad integrum E.* c *Cum ergo quoque sit, vt F, ad G, ita minutia FG, ad idem suum integrum E; æquales erũt minutiæ simplices K, & FG: ac proinde cum minutia K, æqualis sit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque simplex minutia FG, æqualis datæ minutiæ AB, respectu minutiæ CD, cuius integrum E. quod est propositum.*

F, 6.	H, 9.		
A, 2.	C, 3.	E,	$\frac{1}{2}$.
B, 3.	D, 4.	E, 24.	
G, 12.	K, $\frac{1}{2}$.		

A B.	F.
C D.	H.
E.	G.

a 2. huius.
b 17. sep
c 2. huius.

SIT $\frac{2}{3}$. *minutia minutiæ* $\frac{3}{4}$. *respectu integri* 24. *Huius numeri* $\frac{3}{4}$. *sunt* 18. *& huius numeri* $\frac{2}{3}$. *sunt* 12. *qui numerus est* $\frac{1}{2}$. *dati integri numeri* 24. *Manifestum autem est, si tam numeratores* 2. 3. *inter se multiplicentur, quàm denominatores* 3. 4. *procreari minutiam* $\frac{6}{12}$. *quæ huic* $\frac{1}{2}$. *æquivalet, qualis nimirum erat numerus* 12. *respectu numeri integri* 24.

XIIII.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiã minutiarũ ad simplicem minutiã reducere.

SIT primum AB, minutia minutiæ CD. Ex A, in C, fiat F; & ex B, in D, fiat F. d *Et quoniam minutia EF, exprimit valorem minutiæ A B, respectu minutiæ C D; reducta erit* d 13. huius.

E, 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F,12.

data minutia minutiæ ad simplicem minutiam EF. quod est propositum.

DEINDE sit AB, minutia minutiarum CD, EF, ita vt CD, sit minutia minutiæ EF, & AB, minutia minutiæ CD. Fiat G, ex A, in C, & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atque ita deinceps, si plures sint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros sequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam IK, cuius numerator I, & denominator K, data minutia minutiarum æqualem esse. a *Nam minutia GH, æqualis est minutiæ AB, minutiæ CD, respectu minutiæ EF, tanquam integri cuiusdam.* b *Item minutia IK, æqualis est minutiæ GH, (hoc est, minutiæ AB, minutiæ CD.) minutiæ EF, respectu integri, cuius EF, est minutia; & sic deinceps, si plures sint minutiæ. Quare minutia IK, ex numeris vltimo loco productis constituta, æqualis est data minutiæ minutiarum. quod est propositum.*

G,6. I,6.
A,2. C,3. E,1.
B,3. D,4. F,2.
H,12. K,24.

a 13. huius.
b 13 huius.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. respectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. est numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$. sunt 6. qui numerus est $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem constat, si tam numeratores 2, 3. 1. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis est minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. respectu integri 24.

X V.

DATIS duabus minutijs, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore al-

terius

terius huius minutiæ datę in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ AB, CD, quarum AB, ad aliam æqualem reducenda sit cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum: denominatorem vero denominator D, metiatur per numerũ ex C. in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H, Itẽ ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam GH, minutiæ AB, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productũ; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim

G, 24,		K, 8.
A,	$\frac{2.}{3.}$ F, 12.	C, 3
B,		D, 4
H, 36.		L, 9.
C, $\frac{1}{4}$.	F, $\frac{1}{2}$.	M, $\frac{1}{8}$

F, multiplicans AB, facit G, H, [a] erit vt A, ad B, ita G, ad H, [b] ac proinde minutiæ AB, GH, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit. F, [c] metietur C, ipsum F, per D: [d] Metietur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cum ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadẽ ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata: propterea quod G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, suntque numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur; [e] constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G, cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quod numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominãtur, & ex quorũ multiplicatione factus est numerus K,) cõstituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiã simplicẽ eiusdẽ integri G, cuius numerator est vnitas, & denominator numerus

a 17. sep.
b 8. huius.
c 7. prõ.
d 5. prõ.
e 13. huius.

K, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ CD, qui cõstituit C, minutiã minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties vnitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.

X V I.

DVAE minutiæ, quarũ numeratores in denominatores viciſſim ducti gignũt numeros æquales, æquales sũt: Et minutiarum ęqualium numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior eſt. Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ AB, CD: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: sintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutias AB, CD, æquales esse. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æqualis est numero F, facto ex C, secundo in B, tertiũ,[a] erit vt A, primus ad C, secũdum, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorẽ.[b] Quare minutiæ AB, CD, æquales sunt. VEL sic.[c] Quoniã est vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Est autem E, ipsi F, æqualis; erit quoque minutia AB, minutiæ CD, æqualis. quod est propositum.

[a] 19. sep.

E, 24. F, 24.
A, 2. ✕ C, 8.
B, 3. D, 12.

[b] 9. huius.

[c] 5. huius.

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico numerũ E, æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatẽ mi

nutiarum

nutiarum [a] *erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorẽ, ita B, ad D, denominator ad denominatorẽ.* [b] *Quapropter idẽ numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL sic.* [c] *Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F; ponuntur autẽ minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales, quod est propositum.* a 9. huius. b 19. sep. c 5. huius.

DEINDE sit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoque AB, maiorem esse minutia CD. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quam F; gignetur F, ex minore numero quàm A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, secundo in B, tertiũ, [d] *erit vt G, primus ad C, secundum, ita B, tertius ad D, quartum: Est autẽ maior proportio A, ad C, quam G, ad C; quod A, maior sit quã G, Igitur maior quoq; erit proportio A, ad C, quam B, ad D;* [e] *ac proinde minutia AB, maior erit, quam minutia CD. VEL sic.* [f] *Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Est autem E, maior quàm F; erit quoque minutia AB, maior quam minutia CD. Quod est propositum.* d 19. sep e 9. hu. f 5. hu.

E, 24.		F, 21.
G. $1\frac{3}{4}$	$\frac{A,\ 2}{B,\ 3}$ ✕	$\frac{C,\ 7}{D,\ 12.}$

VERUM sit iam minutia AB, maior quam minutia CD. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cum enim maior sit minutia AB, quam minutia CD, [g] *erit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandem proportionẽ, quam B, ad D, qui sit G.* [h] *Idẽ ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartũ, qui ex C, secundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quam ex G, in D; propterea quod A, maior est quã G; erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quam F, ex C, in B, genitus. VEL sic.* [i] *Quoniã est, vt minutia AB, ad minutiã CD, ita E, ad F: Est autẽ AB, minutia maior quam minutia CD, erit quoque E, maior quam F. quod est propositũ.* g 9. hu. h 19. sep i 5. hu.

ATQUE hæc est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendũ, vtra duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiã ad 5. propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim si fieri potest, ad minores terminos C, D, ita vt minutia CD, minutiæ AB, sit æqualis. [a] *Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; suntque C, D, numeri minores numeris AB; non erunt A, B, minimi termini in sua proportione:* [b] *sunt autem & minimi, cum primi inter se sint. quod est absurdum.*

A, 11.	C, –
B, 12.	D, –

[a] 8. huius.
[b] 3. sep.
[c] 2. sep.

SI vero A, B, non sint inter se primi; [c] *sit eorum maxima mensura C, quæ metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D, & denominator E, æqualē esse datæ minutiæ AB, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E;* [d] *producentur A, B, ex C, in D, E.* [e] *Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E,* [f] *ac propterea minutiæ AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erunt ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.*

A, 36.	D, 3.
B, 48.	E, 4.
C, 12.	

[d] 9. pro.
[e] 17. sep
[f] 8. huius.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.

SIT data minutia AB, reuocanda ad æqualem aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum C, fiat D, quem metiatur B; denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam EC, cuius numerator E, & denominator C, datus,

A, 3.	E, 9.
B, 4.	C, 12.
D, 36.	

æqua-

æqualem esse minutiæ AB,*data. Quia enim* B, *metitur* D' *per* E,a *fiet* D,*ex* B,*in* E: *Factus est autem idem* D, *ex* A, *in* C.b *Igitur erit, vt* A,*primus ad* B,*secundum,ita* E, *tertius ad* C;*quartum;* c *ideoque minutiæ* A B, E C, *æquales erunt: quod est propositum.* a 9. prop. b 19 sep. c 8. huius.

QVOD si B,*non metiatur* D,*ex* A, *in* C,*procreatum, non poterit data minutia* AB, *reduci ad denominationem datam* C.*Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam* E C. *Quia ergo minutiæ* AB,EC,*æquales sunt;* d *erit vt* A,*ad* B,*ita* E,*ad* C.e *Idem igitur numerus fiet ex* A, *primo in* C, *quartū, qui ex* B, *secundo in* E,*tertium, videlicet numerus* D, *factus ex* A,*in* C.f *Igitur* B,*metietur* D,*per* E.*quod est absurdum. Ponitur enim* B, *ipsum* D,*non metiri.* d 8. huius. e 19. sep. f 7. pron.

$\frac{A,3.}{B,4.}$	$\frac{E,-}{C,10.}$
D,30.	

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator vero maior numerus diuidens.

SIT minor numerus A,*diuidendus per maiorem* B. *Dico Quotientem esse minutiam* A B, *cuius numerator* A, *& denominator* B. g *Quoniam enim est, vt* A, *ad* B, *numerus diuisus ad diuidentem, hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia* AB,*ad integrum, hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia* A B, *Quotiens diuisionis numeri* A,*per numerum* B.*quod est propositum.* g 8. huius.

A,6.	B,11.
	$\frac{A,6.}{B,11.}$

HINC fit; si diuiso numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid supersit; Quotienti integro inuento addendam adhuc esse minutiam cuius numerator sit numerus ex diuisione reliquus; denominator vero, numerus

diuidens.

diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui necessario minor est numero diuidente, diuidendus adhuc est per eundem numerum diuidentem, qui maior est. Verbi gratia. Diuiso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc
a 19. huius. *diuidenda per 4.* a *Fit ergo minutia* $\frac{3}{4}$. *ita vt totus Quotiens sit* $5\frac{3}{4}$.

X X.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

SINT primum addenda duæ minutiæ AB, CB, eiusdē denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, esse summam ex additione minutiarum AB, CB, collectam.
b 4. huius. *Quoniam enim minutiæ eundem habent denominatorem;* b *erit vt A, ad C, ita minutia AB, ad minutiam CB: Et componendo, vt A, C, simul ad C, ita minutiæ AB, CB, simul ad*

A, 3	C, 4	D, 7.
B, 10.	B, 10.	B, 10.

c 4. huius. *minutiam CB.* c *Vt autem C, ad D, ita quoque est minutia CB, ad minutiam DB. Igitur ex æquo erit, vt A, C, simul ad D, ita minutiæ AB, CB, simul ad minutiam DB. Cum ergo A, & C, simul æquales sint ipsi D, ex constructione; erunt quoque minutiæ AB, CB, simul æquales minutiæ DB. quod est propositum.*

DEINDE sint addendæ duæ minutiæ AB, CD, diuersarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem posterioris; & C, numerator posterioris in B, denominatorem prioris, collectaque sit summa E, ex duobus illis productis, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam EF, esse summā

A, 2	C, 3	E, 17.
B, 3	D, 4	F, 12.

d 6. huius. *ex datis duabus minutijs AB, CD, collectam.* d *Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum AB, CD, ita F, ex denominatoribus productus ad E,*

sum-

summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis: erit conuertendo, vt summa minutiarum AB,CD, ad integrum, ita E, ad F: a Vt autem E, ad F, ita quoque est minutia EF, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum AB,CD, ad integrum, ita minutia EF, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum AB, CD, æqualis erit minutiæ EF, ac proinde minutia EF, summa erit ex minutijs AB,CD, collecta. quod est propositum. a 2. huius.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutijs AB,CD, æquales, vt ex demonstratione propos. 10. constat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia EF, summa minutiarum AB, CD, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis, ad quas AB,CD, reductæ sunt, vt initio huius propositionis est demonstratum.

IAM vero datis pluribus minutijs, addendæ primum erunt duæ primæ: deinde hæc summa cum tertia coniungenda, atque hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutiæ seorsum.

SINT verbi gratia, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. vnitates, quæ faciunt $\frac{1}{1}\frac{5}{2}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{1}{1}\frac{7}{2}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. est $\frac{2}{2}\frac{1}{7}$. hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$ ipsius 12 at $\frac{4}{9}$. eiusdem, 16. Vbi vides ex 12. & 16. confici 28. hoc est $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

X X I.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX maiore minutia AB detrahenda sit minor CB, sintque primum hæ minutiæ eiusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquus sit numerus D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam

A, 7.	C, 3.	D, 4.
B, 10.	B, 10.	B, 10.

DB, reliquam esse post detractionem minutiæ CB, ex minutia AB. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D, componetur A, ex C, & D. Minutia ergo AB, cuius numerator A, ex numeratoribus C, D, collectus est, summa est duarum minutiarum CB, DB, vt in prima parte antecedentis propos. ostensum est. Quare detracta minutia CB, ex minutia AB, reliqua fiet minutia DB. quod est propositum.

DEINDE minutiæ AB, CD, habeant diuersos denominatores, detrahendaque sit minor CD, ex maiore AB. Ex C, numeratore minoris in B, denominatorem maioris fiat E, & ex A, numeratore maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatus ex F, relinquat G, cui supponatur

F, 15. E, 8.

A, 3.	C, 2.	G, 7.
B, 4.	D, 5.	H, 20.

denominator ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam GH, esse reliquã post detractionẽ minutiæ CD, ex minutia AB. Quoniã.n.D, multiplicãs
a 17. sep. A, B, facit F, H, [a] erit vt A, ad B, ita F, ad H: [b] vt autẽ A, ad
b 2. huius. B, ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque vt F, ad H, ita minutia AB, ad integrum. Rursus quia B, multi-
c 17. sep. plicans C, D, facit E, H, [c] erit vt C, ad D, ita E, ad H: [d] Vt
d 2. huius. autem C, ad D, ita est minutia CD, ad integrum. Igitur erit quoque vt E, ad H ita minutia CD, ad inregrum. Quia igitur est vt E, primus ad H, secundum, ita minutia CD, ter-
e 2. huius tius numerus ad integrum, quartum numerum: [e] Et vt G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia GH, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. scholij propos. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus simul, ad H, secundum, ita minutia CD, GH, tertius & sextus numerus simul, ad integrum. Vt autem E, G, simul, ad H, ita est F, ipsis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus

reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minutia CD, GH, simul ad integrum. Cum ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutiam AB, ad integrum; erit quoque vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, GH, simul ad idem integrum: ac propterea aequales erunt minutia AB, & minutia CD, GH, simul. Detracta igitur minutia CD, ex minutia AB, reliqua erit minutia GH. quod est propositum.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorũ in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorum inter se, gignuntur duae minutiae eiusdem denominationis minutijs datis aequales, vt ex demonstratione propos. 10. constat; si E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia GH, reliqua post detractionem minutiae CD, ex minutia AB, veluti initio huius propos. ostensum est.

IAM vero si dentur integra vna cum minutijs, subtrahenda erũt integra seorsum ab integris, & minutia à minutia. Quod si minutia detrahẽda, maior sit quam ea, à qua fieri debet subtractio,[a] reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutiae adhaerentis. Vt si subtrahenda sint $6\frac{2}{5}$. ex $10\frac{3}{4}$ subtractis 6. ex 10. supersunt 4. & subductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. superest minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quae cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebũtq; 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15. & subducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$.

[a] 11. huius.

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiae huius numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$. id est, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc est, ex 30. supersunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt superior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiã multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam CD, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum AC, inter se fiat E, cui supponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum AB, CD, inter se. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F, a Eritque vt minutia EF, ad minutiam CD, ita G, ad H. Quia vero C, multiplicans A, F, facit E, H; b erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rursus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F; c erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex aequalitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita ostẽdimus esse minutiam E F, ad minutiam CD: d Et vt A, ad B, ita est minutia A B, ad integrum, hoc est, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia EF, ad minutiam CD, ita minutia AB, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiae A B, in minutiam CD. quod est propositum.

H, 60.	G, 40.		
A, 2.	C, 4.	×	E, 8.
B, 3.	D, 5.		F, 15.

A.	G.
E.	F.
B.	H.

a 5. huius.
b 17. sep.
c 17. sep.
d 2. huius

QVOD si minutia per numerum integrum sit multiplicanda, supponẽda erit integro numero vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est numerus integer datus, denominator autem vnitas. Ex quo fit, satis esse, si tunc numerator propositae minutiae per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero supponatur eiusdem minutiae propositae denominator; propterea quod vnitas integro numero supposita in denominatorem datae minutiae ducta eundem denominatorem datae minutiae non auget. Vt si multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. *per* 5. *fient* $\frac{15}{4}$. *vt hic apparet,* $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{1}$. *Gignetur enim minutia* $\frac{15}{4}$.

e 11. huius.

SI vero integris minutiae adhaereant, e reuocanda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cũ minutia adhaerente, atque ex numeratore huius minutiae, & numeratore minutiae adhaerẽtis vnus numerator cõstitui. Vt si multiplicanda sint $7\frac{2}{3}$. *per* $4\frac{1}{2}$. *fient hae duae minutiae multiplicandae,* $\frac{23}{3}$. $\frac{9}{2}$.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero assumpto conferenda, vt in additione, ac subtractione factum est, sed cũ quadrato numeri integri assumpti: quia cum comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc est, cum eius quadrato. Itaque sint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. *minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia* $\frac{8}{15}$. *Necesse est ergo, vt* $\frac{2}{3}$. *numeri 60. in* $\frac{4}{5}$. *eiusdem faciant numerum, qui constituat* $\frac{8}{15}$. *quadrati, qui ex 60. in se producitur: Id quod liquido constat. Nam* $\frac{2}{3}$. *numeri 60. sunt 40. &* $\frac{4}{5}$. *eiusdem sunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit* $\frac{8}{15}$. *numeri 3600. hoc est quadrati ipsius 60.*

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia AB, per minutiam CD, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita vt diuiso A, per C, Quotiens sit E, & diuiso B, per D, Quotiens sit F. Dico minutiam EF, esse Quotientem diuisionis minutiæ AB, per minutiam CD. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; [a] *gignetur A, ex C, in E, & B, ex D, in F.* [b] *Igitur minutia AB, producta est ex multiplicatione minutiæ EF, per minutiam CD; ac proinde ex defin. multiplicationis erit, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita minutia EF, ad 1. Quocirca cum sit, vt AB, minutia diuisa a l CD, minutiam diuidentem, ita minutia EF, ad 1. erit ex defin. Diuisionis minutia EF, Quotiens diuisionis minutiæ AB, per minutiam CD. quod est propositum.* a 29. pron. b 22. huius.

A, 12.	C, 3.	E, 4.
B, 16.	D, 8.	F, 2.
A, 6.	C, 3.	E, 2.
B, 8.	D, 8.	F, 1.
A, 3.	C, 3.	E, 1.
B, 8.	D, 4.	F, 2.

DEINDE numeri C, D, minutiæ CD, non metiantur numeros A, B, minutiæ AB. [c] *Reducatur minutia AF,* c 15. huius.

ad aliam æqualem EF, cuius numeros E,F, numeri C, D, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod quidē fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A,B, ut gignantur E, F, veluti propos. 15. ostensum est. Quoniam igitur C,D, metiuntur E, F, per G,H, erit minutia GH, Quotiens diuisionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, ut initio huius propos. demonstratum est. quod est propositum.

E, 24.	A, 2.	K, 12.	C, 3.	G. 8.
F, 36.	B, 3.		D, 4.	H, 9.

E, 90.	A, 6.	K, 15.	C, 3.	G, 30.
F. 135.	B, 9.		D, 5.	H. 27.

QVIA vero G,H, numeri minutiæ Quotiētis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, ut dictum est, satis est ad diuisionem cuiusuis minutiæ per quamlibet minutiam, si numerator A, minutiæ diuidendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis, & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H, denominatorem Quotientis minutiæ GH. Atque hoc verum est in omnibus minutijs, siue numeri minutiæ diuidētis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, siue non. Nam semper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreātur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda secundum doctrinam propos. 15. reuocatur, ut ex eius propos. demōstratione liquet, atque in hoc apposito exemplo apparet, ubi numeri C, D, numeros A, B, metiuntur per G, H, & numeros E, F, procreatos ex A, B, in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C,D, metiūtur per L, M: atque adeo tam minutia GH, quā LM, Quotiens est minutia AB, per minutiam CD, diuisa.

E, 48.	A, 8.	K, 6.	C, 2.	G, 4.	L, 24.
F, 54.	B, 9.		D, 3.	H, 3.	M, 18.

IAM vero si numerus integer diuidendus sit per minu-

tiam

tiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, supponenda est ei vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est datus numerus integer, & denominator 1. Vt si numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in apposito priori exẽplo perspicuum est. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda sit per integrum numerum 8. fiet Quotiẽs $\frac{1}{16}$. vt in posteriori exẽplo apparet.

$\frac{8}{1.}$	$\frac{1}{2.}$	$\frac{16}{1.}$
$\frac{1}{2.}$	$\frac{8}{1.}$	$\frac{1}{16.}$

QVOD si minutiæ adhæreant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propos. diximus.

VERVM quia non facile est memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; satius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter se permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vsurpare. Vt si diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{21}{8}$. vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ semper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis; iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores esse multiplicandos inter se, vt fiat numerator, &c.

$\frac{3}{4.}$	$\frac{7}{2.}$	$\frac{21}{8.}$

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda sit per eiusdem $\frac{2}{7}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuũ autem est, diuisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{5}{8}$. id est, minutiam $\frac{21}{8}$. quæ proxime inuenta est. Sic etiam si integer numerus 10. octies sumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus supra fuit, ex diuisione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIIII.

MINVTIAM in minutiam inserere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inserenda, sitque primum sensus, addendam esse minutiam AB, vnius particulæ minutiæ CD, ad minutiam CD: hoc est, addendas esse $\frac{3}{4}$*. vnius septimæ ad* $\frac{6}{7}$*. Ex C, numeratore posterioris minutiæ*

F, 24.

A, 3	C, 6	G, 27.
B, 4.	D, 7.	H, 28.

in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris, & composito numero G, supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam GH, procreari ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo sensu, quem diximus, hoc est, minutiam GH, æqualem esse minutiæ AB, respectu vnius particulæ minutiæ CD, additæ ad minutiam CD. Quoniam enim AB, minutia vnius particulæ minutiæ C D, [a] *reducitur ad simplicem minutiam AH, cuius numerator idem est, qui A, productus nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in*

[a] 14. huius.

A, 3	1	A, 3
B, 4.	D, 7.	H, 28.

apposito hoc exemplo apparet. Item minutia FH, minutiæ CD, æqualis est, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorē prioris productum: (Cum enim B, in C, D, faciat F, H; [b] *erit vt C, ad D, ita F, ad H;* [c] *ac propterea minutiæ CD, FH, æquales erunt.) efficitur, minutiam GH, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum FH, A H, componitur, (nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A,) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum FH, AH; efficitur, inquam, minutiam GH, summam esse minutiarum FH, A H, vt initio propos. 20. ostensum est; hoc est, summam ex minutia AB, respectu vnius particu-*

[b] 17. sep
[c] 8. huius.

læ mi-

la minutia CD, qua minutia AH, ostensa est aqualis, & ex minutia C D, qua ostensa est aqualis minutia FH, collectam. Minutia igitur GH, procreatur ex insitione minutia AB, in minutiam CD; id est, aqualis est minutia A B, vnius particula minutia CD, & minutia CD, simul. quod est propositum.

IAM vero si plures minutia AB, CD, EF, GH, sint inserenda, hoc est, si minutia A B, vnius particula minutia CD, vnius particula minutia EF, vnius particula minutia GH: & minutia CD, vnius particula minutia E F, vnius particula minutia GH: & minutia EF, vnius particula minutia G H, addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore postrema minutia GH, in F, denominatorem penultima minutia E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiusdē penultima minutia EF, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultima minutia C D, addatur C,

P, 119.	M, 59.		K, 14.
A, 1.	C, 3.	E, 2	G. 4.
B, 2.	D, 4.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.		L, 15.

numerator eiusdem minutia C D, vt fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proxime antecedentis minutia AB, adijciatur A, numerator eiusdem minutia A B, vt fiat P: Atq; ita deinceps ducatur semper vltimus numerus conflatus in denominatorē proxime antecedentis minutia; productoq; numerator eiusdem proxime antecedentis minutia adijciatur, donec nulla minutia supersit. Numero autē, qui vltimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, vt fiat L, deinde L, in D, vt fiat N, post hac N, in B, vt fiat Q. &c. Dico minutiam P Q, ex insitione datarum minutiarū produci in eo sensu, quem exposuimus. Nam vt in duabus minutijs ostensum est, minutia L, producitur ex insitione minutia EF, in minutiā G H, hoc est, aqualis est summa ex minutia EF, vnius particula minutia GH, & ex minutia G H, collecta. Deinde minutia D, vnius particula minutia EF, vnius particula minutia

a14. huius. GH.[a] facit minutiam simplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatē bis positam hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N, ex D, in L, hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, [b] aequalis est minutiae KL; [c] quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiae. Igitur, cum per ea, quae ad initium propos. 20. demonstrauimus, minutia MN, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, cōflatur, aequalis sit summae collectae ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; aequalis quoque erit eadē minutia MN, summae collectae ex minutia GH, et ex minutia E F, vnius particulae minutiae GH, atque ex minutia C D, vnius particulae minutiae E F, vnius particulae minutiae G H. Rursus minutia A B, vnius particulae minutiae C D, vnius particulae minutiae E F, vnius particulae minutiae G H, [d] facit minutiam simplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus. Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus Q, ex B, in N, productus, [e] aequalis est minutiae MN, [f] quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiae. Cum minutia igitur PQ, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, q fit ex B, in M, conflatur, aequalis sit summae collectae ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q; vt initio propos. 20. mōstratum est; aequalis quoque erit eadem minutia PQ, sūmae collectae ex minutia GH, & ex minutia EF, vnius particulae minutiae GH, & ex minutia C D, vnius particulae minutiae EF, vnius particulae minutiae GH, & ex minutia AB,

Marginal notes: b 8. huius. c 17. sep. d 14. huius. e 8. huius. f 17. sep.

vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH, quod est propositum. Eademque ratio est de pluribus.

SIT deinde sensus, addendam esse minutiam A B, totius minutiæ CD, ad minutiam CD. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, supponatur H, ex denominatoribus E, D, procreatus.

E, 18.	F, 24.	
A, 3	C, 6	G, 42
B, 4.	D, 7.	H, 28.

Dico minutiam GH, produci ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiā GH, æqualem esse summæ collectæ ex minutia CD, & ex minutia AB, minutiæ CD. Quoniam enim minutia AB, minutiæ CD, a reducitur ad minutiam simplicem EH, cuius numerator est E, ex numeratoribus A, C, procreatus; denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appositum demonstrat: a 14. huius.

A, 3	C, 6	E, 18
B, 4.	D, 7.	H, 28.

b Minutia quoque FH, æqualis est minutiæ CD; c quod numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia GH, (quę ex ijs, quæ ad initium propos. 20. ostendimus, æqualis est summæ minutiarum EH, FH,) æqualis summæ collectæ ex minutia CD; (hoc est, ex minutia FH) & ex minutia AB, minutiæ CD, (id est, ex minutia EH,) atque ideo minutia GH, procreatur ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in hoc posteriori sensu. quod est propositum. b 8. huius. c 17. sep.

QVOD si plures sint minutiæ inserendæ A B, C D, E F, GH, hoc est, minutia AB, minutiæ CD, minutiæ E F, minutiæ GH; & minutia CD, minutiæ EF, minutiæ G H; & minutia EF, minutiæ GH, addendæ sint ad minutiam G H, ita agen-

P, 232.	M, 104.	K, 20.	
A, 1	C, 3	E, 2	G, 4
B, 2.	D, 4.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.	L, 15.	

dum erit. Ducatur G, in F, productoque numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adijciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adijciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vsque locum assumptarum productus, donec nulla supersit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus est, supponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori sensu. Dico minutiam P Q, produci ex insitione dictarum minutiarum, si insitio intelligatur, vt dictum est. Nam, vt in duabus minutijs demonstratum est, minutia KL, producitur ex insitione minutiarum E F, GH, id est, æqualis est summæ collectæ ex minutia E F, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, totius minutiæ

a 14. huius. *E F, totius minutiæ G H, a facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem est N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K; gignitur, denominator autem est idem N, ex D, in L, hoc*

b 8. huius. *est, ex denominatoribus H, F, D, procreatus; b æqualis est minutiæ K L; c quod numeratores harũ minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandẽ quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ.*

c 17. sep.

P, 232.	M, 104.	K, 20.	
A, 1 / B, 2.	C, 3 / D, 4.	E, 2 / F, 3.	G, 4. / H, 5.
Q, 130.	N, 60.	L, 15.	

Igitur cum minutia M N, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis sit per ea, quæ initio propos. 20. ostensa sunt, summæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autẽ N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K

gigni-

gignitur, denominator vero est idem N; æqualis erit etiam eadem minutia MN, summæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, minutiæ GH, & ex minutia CD, minutiæ E F, minutiæ GH. Rursus minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH, a facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autẽ Q, ex B, in N, procreatus, siue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem est idem Q, ex B, in N, procreatus, b æqualis est minutiæ MN; c quod harum minutiarum numeratores eundem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N. faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem nnmeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum æqualis sit, ex ijs, quæ initio propos. 20. demonstrata sunt, summæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem est Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem est idem Q; æqualis quoque erit summæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, minutiæ GH, & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH, & ex minutia A B, minutiæ CD, minutiæ E F, minutiæ G H. quod est propositum. Eademque de pluribus est ratio.

a 14. huius.

b 8. huius.

c 17 sep.

DE PROPORTIONVM compositione.

EXPEDITIS ijs, quæ ad fractorum numerorum demonstrationes pertinent, reliquum est, vt compositionem proportionum explicemus: Id quod ad defin. 10. lib 5. & ad defin. 5. lib. 6. & ad propos. 23. lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compositionem illam proportionum, de qua Euclidis egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. in ijs propositionibus, vbi duplicatam, triplicatam, aut compositam proportionem de magnitudinibus, vel numeris

demonstrat, non esse vero additionem proportionum, ita ut duplicata, vel triplicata proportio sit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicataue: Item ut proportio ex pluribus proportionibus composita sit vere totum quippiam, cuius partes sint proportiones, ex quibus componi dicitur, ut plerunque interpretes Eucl. existimant, ex hoc perspicue confirmari potest; quod pars esset vel æqualis, vel maior toto. Nam cũ hæc compositio intelligenda sit, siue maior quantitas cũ minore, siue minor cum maiore conferatur, ut ad defin. 10. lib. 5. ostendimus, si positis his tribus terminis continue proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non solum duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. ut vult defin. 10. lib. 5. sed vere esset duplo maior, ita ut coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, ut Eucl. interpretes putant, quis nõ videt partem esse maiorem toto, nimirum proportionẽ 1. ad 10. quæ vna pars est, maiorẽ esse proportione 1. ad 100? Hic autẽ 4. 4. 4. partem æqualem esse toti? Sic etiã, si, positis his tribus terminis nõ continue proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. vere coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, ut ijdem auctores contendunt, esset quoq; pars maior quã totum, quod proportio dupla 4. ad 2. maior sit proportione subdupla 4. ad 8. Hic autẽ 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad secundum, proportioni 10. ad 5 primi termini ad vltimũ. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propos. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera sint 12. & 2. Posterioris vero 3. & 16. Quoniam igitur Euclides ibi demonstrat, proportionem 24. ad 48. compositam esse ex proportionibus laterum, hoc est, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars cõponens, (si hæc compositio est vera additio.) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet subdupla 24. ad 48. Pari ratione, si proportio subdupla 24. ad 48. vere totũ est, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. et proportio suboctupla 2. ad 16. si alterutra harũ ab illa subtrahatur, reliqua erit altera. Igitur

24.	48.
12. 2.	3. 16.

& maius ex minore subtrahi potest, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione subdupla 24. ad 48. & subtracta proportione suboctupla 2. ad 16. ex proportione subdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quam ea, à qua facta est subtractio. Quod si posterioris numeri plani 48. latera sumantur 12. & 4. erit vna partiũ componẽtium nimirũ proportio 2. ad 4. æqualis toti proportioni videlicet 24. ad 48. Et subtracta proportione

24. 48.
12. 2. 12. 4.

2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. superesset adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quæ maior est quam totum, hoc est, quã proportio 24. ad 48. Rursus sequeretur, totũ non augeri, etiamsi ei infinitæ partes adderentur. Positis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. si proportio 12. ad 1. vere coacervatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones simul sumptæ proportioni 12. ad 1. sint æquales: si cum illis terminis continuentur adhuc alij tres termini hoc modo, 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex sex [?]oportionibus, quarũ priores tres sunt eadem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. nõ augent totũ ex illis coacervatũ. Hæc autem omnia absurda sunt, & cõtra principia Mathematicorum. Hic accedit, quod secundum communem hominum sensum duæ proportiones triplæ constituant proportionem sextuplam, non autẽ noncuplam, vt prædicti auctores volunt, quamquã noncupla proportio dicatur tripla duplicata, vt in hisce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, si agens aliquod sit, vt 3. illud idem duplo potentius factum esse vt 6. non aũt vt 9? Sic etiam communis intelligentia cõprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionẽ octuplam, propterea quod duo mouentia vt 3. & 5. moueant simul sumpta, vt 8. non autem ex illis constitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem composita esse dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non posse dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionẽ agentis ad patiẽs

exprimũt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. nõ posset habere agens duplo minus, quod inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autẽ nõ statim intelligat: agens vt 3. in dupla proportione minus esse, quam agens vt 6?

LIQVET ergo huiusmodi compositionem proportionum non esse additionem, sed proportionũ continuationẽ, quæ per multiplicationem denominatorũ fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonstrauimus, vbi etiam exposuimus, cur extremorum proportio dicatur ex medijs proportionibus composita, propter terminorũ continuationẽ, quemadmodũ & ad defin. 10. lib. 5. explicauimus, cur positis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continue proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex ijs, quæ iam iam de vera compositione proportionum dicturi sumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirum additio, subtractio, multiplicatio, ac diuisio fieri debent per proportionum denominatores, vt recte docet Volumnius Rodulphus in disputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum sunt fractiones, siue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cum denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer est, supponi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab vnitate denominata.) quarum quælibet æqualis est fractioni, quam constituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator est, si ex antecedente fiat numerator, & ex consequente denominator: manifesto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, siue per proportionũ denominatores, siue per numeros earundem proportionum quoscunque, positis tamen consequentibus terminis sub antecedentibus, instar minutiarum, instituantur, vt egregie Cardanus præcipit in sua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM enim sint in vnam summam colligendæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores

sunt

sunt 3. & 5. ex quorum additione fit summa 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis. quæ summa etiam colligitur, siue denominatores, supposita prius vnitate cuilibet illorum, instar minutiarum addãtur, siue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos datæ proportiones reperiuntur,

3	5	12	40
1	1	4	8
8		256	
1		32	

perinde ac si essent fracti numeri, positis terminis consequentibus sub antecedentibus, in vnam summam colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autem 256. ad 32. quarum vtraque octupla est. Sic etiam ex proportione dupla superquadrupartiente septimas, & sesquialtera, quarum denominatores sunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4. reperiuntur, fit proportio quadrupla sesquidecima quarta, qualem habent tam

18	3	54	6
7	2	21	4
57		342	
14		84	

numeri 57. 14, quam 342. 84. Sed quando per denominatores instituitur operatio, reuocandi prius sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum est. Nam $2\frac{4}{7}$. reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in aliis etiam operationibus intelligendum est.

DEINDE si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: Item ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla superquadrupartiens septimas, vt hic perspicuum est.

8	3	256	12	57	3	342	6
1	1	32	4	14	2.	84	4.
5		640		72		864	
1.		128.		28		336.	

TERTIO si multiplicanda sit proportio tripla per 2. vel quod idem est per proportionẽ duplam: Itẽ proportio sesquialtera per supertripartientem quintas; instituenda erit opera-

tio

tio, vt hic vides, produceturque ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.

3—2	6	12—10	120	3—8	24	9—16	144
1—1	1	4—5.	20.	2—5.	10	6—10	60

QVARTO & vltimo si proportio sextupla diuidēda proponatur per proportionē triplā: Itē proportio dupla superbipartiens quintas per proportionem sesquialteram: si diuisoris termini permutentur, vt in diuisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio.

6—1	6	120—4	480	24—2	48	144—6.	864.
1—3.	3.	20—12.	240.	10—3.	30.	60—9.	540

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quod in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem & denominatorē, quemadmodū in minutijs.

IAM vero multiplicationem proportionū à nobis prascriptam, quā auctores additionem falso nuncupant, cū proportionū compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defi. 5. lib. 6. egit, conuenire, atque adeo cōpositionē illā Euclidis vere esse multiplicationem, non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonstrabimus. Sint dua proportiones A, ad B, & C, ad D, siue aquales, siue inaquales; ducaturque A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex cōsequente vero B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad, F, qua ex illa multiplicatione producitur, esse cōpositā ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D; ita vt si proportiones ha A, ad B, & C, ad D, fuerint aquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5. si autem fuerint inaquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat

A, 6.	C, 12.	A, 3	C, 6
B, 2.	D, 4.	B, 2.	D, 5.
E, 72.	F, 8.	E, 18.	F, 10.
G, 24		G, 12.	

enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G,[a] *erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F.*[b] *erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eadem sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cum enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum nō differat, liquido constat compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.* [a] 18. sep [b] 17. sep

EADEM *ratione ostendemus, subtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, non esse aliud, quam diuisionem à nobis explicatā, esseque cōpositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur.*

A, 9.	C, 3.		A, 4.	C, 6.
B, 1.	D, 1.		B, 2.	D, 3.
E, 9.	F, 3.		E, 8.	F, 12.
G, 27.			G, 24.	

Dico proportionem E, ad F, quæ ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionē C, ad D, producitur, vt docuimus, esse eam, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiunt G, F,[c] *erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiūt G, E;*[d] *erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F,* [c]*omposita sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportionibus G, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F; ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportio-* [c] 1. sep [d] 17. sep

ne

ne A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius esse diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit? Atque hac de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re a Volumnio Rodulpho Spoletano conscriptum.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

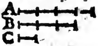
ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantũ satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nũc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solida, tum plana, neque perfecte intelligi possunt, neque cum res tulerit, in opus atque usum conferri; propterea quod plerunque latera earum incommẽsurabilia sunt.

Id quod & de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hæc incommensurabilia sæpenumero existant, vt ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearũ, de quibus differit, obscuritatem; omnes neruos industria mea in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine multo labore a quouis, qui præcedentium tamen librorum demonstrationes recte intellexerit, possit percipi. Neque enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Immo contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abest, vt existimem, tractationem illum radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicũ atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino sit ignarus: propterea quod ille demonstrationes ad vsum potest reuocare, hic vero nullo modo. Hac enim de causa & nos priora decem theoremata secundi lib. numeris accommodauimus vt oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, vt ea re & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius offusuri, quam lucis aliquid maioris daturi & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusque demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ sola necessaria ibi fuerunt, nemo fere sit, qui

ignoret.

ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra ſunt verſati, facili negotio demonſtrationes huius lib. ad numeros accommodare poſſunt per ſe ipſos, quando volunt, præſertim cum iam hoc ipſum non multo ante à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inſcripſit, diligenter effectum ſit, & accurate.

ITAQVE, vt ad inſtitutum redeamus, inchoans rem ipſam Euclides, more ſuo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit: declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur cõmenſurabiles, definiens eas eſſe, quas eadem mẽſura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem menſura C, metitur, (metitur enim C, ipſam A, quater repetita, & ter ſumpta ipſam B,) dicuntur commenſurabiles. Eodem modo commenſurabiles ſunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum: quia eas linea tam vnius palmi, quam dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commenſurabiles dicuntur ſuperficies, quas vna, & eadem ſuperficies metitur; Item corpora, ſolidaue cõmenſurabilia, quæ metitur idẽ corpus, ſeu ſolidũ.



II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem menſuram contingit reperiri.

TALES magnitudines ſunt, diameter quadrati cuiuſuis, et latus eiuſdẽ; quoniam nullã habent menſuram communẽ, vt propoſitione vltima huius lib. demonſtrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurima alia lineæ incommenſurabiles, quibus ſcilicet menſura aliqua communis dari nullo modo poteſt, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetque, quanam ratione inueniri poſſint. Rurſus, ſuperficies dicũtur incommenſurabiles, & ſolida incommenſurabilia, quæ nullam admittunt menſuram communem.

III.

RECTAE lineæ potentia commen-

ſurabiles ſunt, cum quadrata earum ide[...]
ſpatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commenſurabiles ſu[...] longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam menſu[...] communis, metitur; cuiuſmodi ſunt illæ, quas in expoſitio[...] defin. 1. commenſurabiles ſimpliciter diximus: quædam v[...] ro longitudine incommenſurabiles, quas ſcilicet nulla l[...] nea, tanquam menſura communis, metitur. Rurſus linear[...] quæ ſunt incommenſurabiles longitudine, aliæ ſunt eiuſm[...] di, vt earum quadrata ſint commenſurabilia; aliæ vero i[...] ſe habent, vt & quadrata earum incommenſurabilia ſin[...] Lineæ ergo illæ longitudine incommenſurabiles, quarũ qu[...] drata ſunt commenſurabilia, appellantur hic ab Euclide [...] tentia commenſurabiles; quia videlicet ſecundum earu[...] potentias, hoc eſt, ſecundum earum quadrata (eſt enim, [...] ad propoſ. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiuſque lineæ qu[...] dratum ab ea deſcriptum) commenſurabiles ſunt, licet ip[...] ſecundum longitudinem ſint prorſus incommenſurabile[...]

QVOD ſi quis roget, cur Euclides definierit ſeorſum l[...] neas potentia commenſurabiles, non autem commenſurab[...] les longitudine, reſpondendum eſt, lineas longitudine com[...] menſurabiles ſatis ſuperq; eſſe explicatas in definitione c[...] menſurabilium magnitudinum, cum huiuſmodi lineas vn[...] communis menſura metiatur, vt dictum eſt: At vero qu[...] niam lineas potentia commenſurabiles nulla cõmunis me[...] ſura metiri poteſt, ſed tantummodo earum quadrata ide[...] ſpatium metitur, ideo neceſſarium omnino fuit, vt ea propri[...] definitione explicarentur.

IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, c[...] quadratis earum nullum ſpatium, quo[...] ſit communis eorum menſura, contingi[...] reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommenſurabiles, qu[...]

rum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.

HABENT autem lineæ commensurabiles tam longitudine quam potentia, hanc quasi conuenientiam inter se, & connexionem, vt lineæ longitudine commensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita vt nullæ lineæ dari possint commensurabiles longitudine, quin earum quadrata commensurabilia quoque sint, quoniam quadratū ex communi earum mensura descriptum metitur tanquam mensura communis earum quadrata, vt in subiecta figura apparet: sicut enim recta AB, metitur rectas CD, EF, ita quoque quadratum AG, quadrata CH, EI, metitur: Non autem, vt omnes lineæ potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multæ enim lineæ sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quam potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potētia incommensurabiles; sint etiā incommensurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoque incōmensurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundū earū quadrata, commensurabiles existant. Quæ quidem omnia perspicua erūt ex coroll. propos. 9. huius libri.



V.

HIS positis, ostenditur, cuicunque rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia so-

lum. Vocetur autem propoſita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea notæ magnitudinis, erũt omnium aliarum, quæ cum ipſa comparantur, quædam illi commenſurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum. Item quædam illi incõmenſurabiles longitudine tantum, quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonſtrabitur varijs in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis oſtendi, ſeu colligi, (quamquam eius verba hoc ſonare videantur) hac ita ſe habere: ſed ſolum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quaſdam dici poſſe propoſita recta linea commenſurabiles longitudine, & potentia, quaſdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo ſequitur, ſed demonſtrabitur in ſequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa propoſita, ratione cuius aliæ commenſurabiles ſunt, vel incommenſurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis vero Rationalis; quoniam ea ponitur ſemper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ non ſemper nota ſunt, quamuis ſingulæ ſeorſum ſumptæ exiſtant certæ quoque, ac notæ; cum qualibet in quotcunque partes æquales poſſit diuidi.

VI.

ET huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commenſurabiles quomodocũque, appellari quoque Rationales non quidem ex poſitione, vt illa, ſed quia cum illa comparata reperiuntur ei commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITAQVE ex ſententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem eſt, linea recta cuius quadratum eſt 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis cum potentia ſit commenſurabilis lineæ Rationali, (eſt enim

tan

tam numerus 20.quam 1000.commensurabilis numero cuilibet quadrato.vt 16.100.&c.)quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis.Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant,quod numero non possit exprimi.

VII.

HVIC vero incommensurabiles,Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti defin.Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantum sunt commensurabiles proposita recta Rationali, appellauit Rationales; liquido constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ proposita recta Rationali incommẽsurabiles sunt vtroque modo, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20.vel 1000.&c.seu(quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20.vel 1000.&c. non posse appellari Irrationalem, cum non sit longitudine & potentia,sed longitudine tantum Rationali linea proposita incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum,quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur,quia & ipsum certum est, ac notum,comparationeque illius aliæ superficies,commensurabiles,incommensurabilesue dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem, Rationalia.

OMNES plana superficies quadrato Rationalis lineæ

proposita commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidē ex positione, vt illud, sed quia cum eo collata reperiuntur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunque cōmensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies planæ quadrato à Rationali lineæ descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatijs incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita vt si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si vero non fuerint quadrata, sed alia quæcunque figura rectilinea, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes spatia incommēsurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. collegimus,

lineas,

lineas, quæ possunt spatia incommensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nã lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, *ex 4 defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoque incommẽsurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonstrabiturque in coroll propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.*

PRAETEREVNDVM quoque nõ est, Euclidẽ & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potẽtia tantum: *apponere fere semper vocibus istis:* commensurabiles ac commensurabiles: *Vix autem, & rarissime his:* Rationales, & Irrationales: *Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tãtum; Item incommensurabiles longitudine & potẽtia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniã Campanus non animaduertit, occasionem multis præbuit, vt varie, & obscure in hoc 10. lib. de lineis commẽsurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusque sint locuti.*

CAETERVM his definitionibus adiungemus postulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vsus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit, minor verò infinite possit augeri, perspicuum est, minorem toties posse

multiplicari, donec superet maiorem. Constat hoc etiam ex ijs, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum censeri eiusdem generis, cum alterutra ita potest multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuersi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE Pronunciata.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, ostensa sunt a nobis in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

CAETERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit a numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, vt ad propos. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus

nibus seriem Campani neglexìmus, vt docuimus ad initiũ primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine è regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinẽ Theonis, inferior autem Campani seriem demonstraret. Quod si vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter Theonem, & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

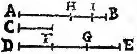
THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquũ est, rursus detrahatur maius quàm dimidiũ; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

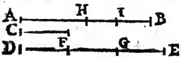
PROPOSITAE sint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, sit maior. Dico si ex AB, auferatur maius quam dimidiũ; & ab eo, quod reliquum est, rursum maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor sit quam C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, maior sit quam AB, ita vt DE, sit multiplex ipsius C, proxime maior quam A B. Diuisa autem D E, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales, detrahatur ex AB, maius quam dimidium AH, & ex reliqua H B, maius



quam dimidium HI; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius AB, multitudine æquales sint partibus ipsius D E. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot sunt ipsæ DF, FG. GE. Quia igitur DE, maior est quam AB; At ex DE, ablatum est DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium, si DE, ipsius C, sit duplex; ex AB, vero maius quam dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, maius. (Cũ



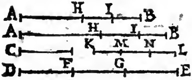
enim DE, maior fit quam AB; si ex D E, dimidiũ auferretur, necnon & ex AB, dimidium, esset quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex AB, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex A B.) Rursus quoniam FE, maior est quàm HB, auferturque ex FE, dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, si FE, maior sit quam duplex ipsius C; at ex HB, maius quam dimidium HI; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partẽ ipsius DE, qualis hic est G E, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, maior quam IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est I B, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiori auferatur maius, &c Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum F E, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo I B; cũ ex maiori DE, ablatum sit D F, minus quàm dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.

ALITER. Facta constructione, vt prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius I B, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in K L, quot in D E. Quoniam vero AH, maior est quam HB vel certe illi æqualis, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quam IB; erit quoque AH, maior quam IB, hoc est, quam KM. Rursus quia HI, maior est quam IB, vel certe illi æqualis; est autem IB ipsi MN, æqualis: erit quoque H I, maior quam MN, vel illi æqualis; atq; adeo tota AI, maior, quam tota KN.

Additis



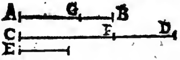
Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quam tota KL: Est autẽ DE, maior adhuc, quam AB. Multo ergo maior erit DE, quam KL. Quare cũ sit vt DE, ad C, ita KL, ad IB; (Sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quam multiplex est DE, ipsius C,) a erit quoque C, maior quam IB. Ac proinde relicta est IB, minor quam C. Quod erat demonstrandum. a 14. quint.

SCHOLIVM.

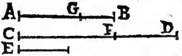
LVCE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16 lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.



DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarum minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB: & sic deinceps, alterna quadam detractione, auferatur semper minor de maiore, & nunquã reliqua metiatur præcedentẽ. Dico magnitudines AB, CD, incõmensurabiles esse. Si.n. non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mensura cõis. Metiatur eas, si fieri põt, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi



AB, vel minor. Detracta aūt AB, ex CD, quoties poteſt, relinquat FD, ſe minorem, ita vt AB, ipſam CF, metiatur. Rurſus detracta FD, ex AB, relinquat ſe minorē
a 1.*def.* GB, ita vt FD, metiatur ipſam AG; atq; hoc ſemper fiat.[a] Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum AB, ablata ex CD, relinquat FD, ſe minorem, erit CF, ablata maior, quā dimidia ipſius CD; alias ſi eſſet dimidia, vel minor quam dimidia, poſſet adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quam dimidia ipſius AB: Et ſic deinceps ſemper fiet. Quare cum ſemper auferatur
b 1.*dec.* maius, quam dimidium,[b] relinquetur tandem magnitudo quædam minor quam E.) Sit ergo iam relicta GB. minor quam E. Quoniam igitur E, metitur AB, & AB, me-
c 2.*pron.* titur CF;[c] metietur quoque E, ipſam CF: Metitur autē E,
d 3.*pron* & totam CD.[d] Igitur E, reliquam quoque FD, metietur.
e 2.*pron.* At FD, metitur AG;[e] quare & E, ipsā AG, metietur. Me-
f 3.*pron.* titur autem E, & totam AB:[f] ergo E, reliquam etiam GB, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Nō ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommenſurabiles ſunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

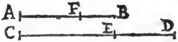
HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommēſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommenſurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturque minor AB, ex CD, & reliqua ſit ED, Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturque FB, & ſic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquā reli-

quam

quam metiri præcedentem. Si enim fieri poteſt, metiatur FB præcedentem ED. Quoniã igitur FB, metitur ED; & ED, metitur AF; a metietur quoque FB, ipſam AF; Metitur autẽ & ſeipſam. b *Igitur FB, & totã AB, metietur: Metitur autem AB, ipſam CE.* c *Igitur & FB, ipſam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipſam ED;* d *Igitur & FB, totam CD, metietur. Oſtenſa eſt autem & FB, ipſam AB, metiri. Quare FB, vtramq; AB, ED, metitur, quod eſt abſurdum, ponuntur enim AB, CD, incommenſurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentẽ magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitum.*



a 2. pron
b 1 pron.
c 2. pron
d 1. pron

SIMILITER & hoc demonſtrabimus.

SI duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua pręcedentẽ.

NAM ſi nunquam reliqua metiretur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines incommenſurabiles, vt demonſtrauit hoc theoremate Euclides, Quod eſt abſurdum. ponũtur enim commenſurabiles.

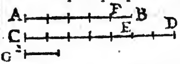
ITAQVE facile ex his dignoſcemus, an duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Nam detracta ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione, ſi reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propoſitæ commenſurabiles, cũ illa eadẽ reliqua metiatur vtramque magnitudinem propoſitã, vt cõſtat ex demõſtratione primi theorematis huius ſcholii. Ex eo enim quod reliqua magnitudo FB, metiri dicebatur præcedentem ED, oſtenſum eſt, eandem reliquam FB, metiri vtramque magnitudinem AB, CD. Si vero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonſtrauit.

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

DATAE duæ magnitudines commenſurabiles ſint AB,CD.quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam AB,CD,commenſurabiles ſunt,ſit vt ſi minor AB,ex maiore CD,detracta, quoties poteſt, relinquat ED;& ED,detracta ex AB.quoties poteſt,relinquat FB,& hoc ſemper fiat alterna quadam detractione;tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur,per 2.theor.præcedentis ſcholij. Metiatur iam F B, reliqua præcedentem ED. Dico FB,eſſe maximam menſuram communem magnitudinum AB, CD. Quod enim

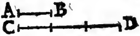


vtramque metiatur,ita oſtendemus.Quoniam FB,meti-
a2.pron tur ED;& ED,metitur AF;a metietur quoque FB, ipſam
b1.pron AF:At metitur FB, & ſeipſam.b Igitur FB, totam AB,
c2.pron metietur;c atque adeo & ipſam CE,quam AB,metitur.
d1.pron Cũ ergo & ipſam ED,metiatur;d metietur quoque FB, totam CD, Metitur ergo FB, vtramque AB, CD. Quare vtriuſque AB,CD,communis menſura eſt FB.

QVOD autem FB,ſit maxima earum communis menſura,ita probabimus.Si non eſt maxima,erit aliqua alia communis earum menſura, maior quam FB.Sit ergo,ſi fieri poteſt, G,illarum communis menſura.maior quam FB.Quia igitur G, metitur vtramque AB, CD;metitur
e2.pron autem & AB,ipſam CE,e metietur quoq. G, ipſam CE:
f3.pron At metitur quoque totam CD,f Igitur G,reliquam quoque ED,metietur: Metitur autem ED,ipſam AF.g Ergo
g2.pron & G,ipſam AF,metietur. Quare cum G,totam etiã AB, metiatur;metietur quoque eadem G,reliquam FB,maior
h3.pron minorẽ.h Quod eſt abſurdum.Non ergo maior magnitudo, quam FB, communis menſura eſt ipſarum AB,CD, Quare FB,maxima earum communis menſura eſt.

QVOD

QVOD si minor magnitudo AB, metiatur maiorem CD, ita vt detracta ex CD, nihil relinquat; erit ipsa AB, ambarum maxima mensura communis: cum & se ipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis: &c. Quod faciendum erat.



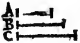
COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

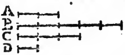
ELICITVR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est FB, esse maximam mensuram communem ipsarum AB, CD. Demonstratum enim est ibi magnitudinem G, si metatur magnitudines AB, CD, metiri quoque maximā mensuram FB. Eademque est ratio de cæteris.

SCHOLIVM.

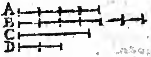
EX his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, necne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incōmensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B,



SI vero A, & B, fuerint commensurabiles, sit earū maxima communis mensura inuenta D; quæ si metiatur quoque magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cum habeant communem mensuram D.

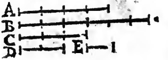


QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensuabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinū A,



& B,

& B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesim.



SI vero C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoque tres

a 3. decimi. *A, B, C, commensurabiles. a Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cum E, metiatur D; & D, ipsas A, & B;*

b, 2. pro. *b metietur quoque E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*

SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si data sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

iiij.

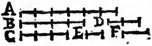
PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

c 3. decimi. SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. c Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si erg D, metiatur quoque C, perspicuum est, D, maximam ess mensuram omnium trium A, B



C. Nam si maior magnitud quam D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsan D, maior magnitudo minorem. quod fieri nõ põt. Si ver D, nõ metiatur C, erunt saltẽ D, C, cõmensurabiles. Cur enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibe mensura earum communis ipsam D, maximam mensu



rā ipſarum A,B,per coroll. prę-
cedentis propoſ. Cum ergo ea-
dem illa mēſura metiatur quo-
que ipſam C; erunt D, & C, commenſurabiles.[a] Sit igitur E, maxima menſura ipſarum inuenta. Dico E, maximam menſuram eſſe datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim ſit communis earum menſura, ita planum fiet. Quia E, metitur D,& C;& D,metitur A,& B;[b] metietur quoque E, ipſas A,& B, Metitur autem & ipſam C: Igitur E,menſura eſt communis ipſarum A,B,C,quemadmodum aſſeruimus.

[a] 3. decimi.

[b] 2. pro.

QVOD autem E, ſit earum maxima menſura, hoc modo confirmari poteſt. Si non eſt maxima,ſit F, maior quam E, ſi fieri poteſt,earum menſura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximā menſuram D, per coroll. præcedentis propoſ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum menſuram maximam E,ex eodem coroll. maior magnitudo minorem Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo quam E,magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima eſt earum communis menſura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis,&c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoque ex hoc colligitur,quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem.

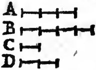
INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi,magnitudinem F,ſi metiatur ipſas A, B, C, metiri quoque E, maximam illarum communem menſuram. Eademque de cæteris eſt ratio.

SIMILI modo,pluribus magnitudinibus cōmenſurabilibus datis, quam tribus,maximam earum menſuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi datæ magnitudines fuerint quatuor,inuenienda erit primum maxima menſura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum menſura maxima,&c. Reliqua vero omnia abſoluēda erunt,vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.

L E M M A.

SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

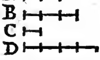
SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; et vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex ijs, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis



E, 3.
F, 4.
G, 1.
H, 2.

demonstrata sunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perspicuum est, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales esse, hoc est, esse vt A, ad D, ita E, ad H. Quod est propositum.

IDEM sequitur, si magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo est, vt A, ad B, ita G, ad



E, 3.
F, 12.
G, 4.
H, 6.

H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

SCHOLIVM.

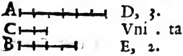
QVONIAM præcedenti lemmate & in propoſitione, quæ ſequitur, & in alijs multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonſtrare, cum non facile videatur ex demonſtratis ſequi. Nam magnitudo & numerus diuerſa genera quantitatis conſtituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris oſtenſa tantum eſt in quantitatibus eiuſdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonſtratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri poſſit, cum omnes demonſtrationes illius libri numeris quoque conueniãt. Vel certe demonſtratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent eaſdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

THEOR. 3. PROPOS. 5. V.

COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commenſurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter ſe, quam numerus aliquis habet ad alium numerũ. a Sit enim earum maxima menſura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Eſt autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipſam B, atque

a 3. decimi.



vnitas numerũ E, æque metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinẽ, ita D, numerus ad E, numerum. Commenſurabiles ergo magnitudines inter ſe rationem habent, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonſtrationem huius theorematis aſſumat maximam communem menſuram propoſitarũ magnitudinem commenſurabilium, qualis fuit C, ipſarum A, & B, perſpicuum eſt, lineas debere eſſe longitudine, & ob id potentia quoque commenſurabiles, vt rationem habeant inter ſe, quam numerus ad numerum, Hæ enim ſolæ communem recipiunt menſuram, atque adeo in eis demonſtratio locum habet.

QVOD ſi lineæ ſint potentia tantum commenſurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter ſe rationem, quam numerus ad numerum, quia commenſurabilia ſunt, atq; idcirco menſuram habent communem, ipſiſque demonſtratio huius theorematis conuenit: At ipſæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommenſurabiles cum ſint, communis menſuræ ſunt expertes, ac propterea huius theorematis demonſtratio in ipſas conuenire nullo modo poteſt.

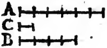
EX demonſtratione porro eiuſdem huius theorematis liquido conſtat, commenſurabilium magnitudinũ proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos eorum communis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.

VNDE ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeãt in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æque, ac communis magnitudinum cõmenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam vt demonſtratum eſt, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quãcunque communem earum menſuram, nihilominus hoc

theorema

theorema demonstrabimus eodem argumento. Quamuis enim numeri



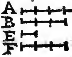
D, 6.
Vni . tas.
E, 4.

D,& E,maiores inueniantur in hac posteriori demonstratione,quam in priori;habent tamen eandem proportionem cum illis,vt ex apposita figura apparet. Quoniam vero in priori demõstratione numeri inuenti,sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea fortassis Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit,& non quamlibet,licet id necessarium non sit.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

SI duæ magnitudines inter se proportionem habeant,quam numerus ad numerum:commẽsurabiles erunt magnitudines.

HABEANT duę magnitudines A, B,eam proportionem,quam numeri C,D.Dico A,B,magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarũ partium vni æqualis sit magnitudo E.Deinde quoties vnitas repetita metitur

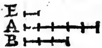


C, 5.
Vni . tas.
D, 3.

numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C,continebit æqualiter A, ipsam E,& C, numerus vnitatem. Quare erit A,ad E,vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E,ad F,ita vnitas ad D, quod E, ipsam F, & vnitas ipsum D, æque metiatur.Igitur per lemma propos. 4.huius lib.erit ex æquo,vt A,ad F,ita C,ad D:Erat autem etiam vt C,ad D,ita A, ad B. Igitur erit vt A,ad B, ita A,ad F, a ac propterea B,& F,magnitudines æquales inter se sũt. a 9. qn
Quocirca cum E,ipsum F,metiatur,metietur quoque eadem E,ipsam B; Metiebatur autem & ipsam A.Igitur magnitudo E,vtramque A,& B,metitur: b Ac proinde A, & b 1.def

B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant, &c Quod erat demonstrandum.

ALITER. Quot sunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipsam A, & vnitas ipsum D, æque metiantur; ponaturque vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma superius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D:



Vni . tas.
C, 5.
D, 3.

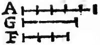
Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, & B, habentes eandem communem mensuram E, a commensurabiles sunt. Quod est propositum.

a 1. *desi.*

COROLLARIVM.

EX priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates sunt in C, & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot vnitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonstratum est.

HINC rursus apparet, quanam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerũ D, inuenienda erit primum linea F, ex iis quæ modo diximus, ad quam sic se habeat A, vt C, ad D: b Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad F, atq; adeo vt numerus C, ad numerũ D, (cum sit vt A, ad F, ita C. ad D,) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.



C, 5.
D, 3.

b 13. *sex.*

SCHO-

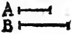
SCHOLIVM.

IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, cõmensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantũ; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij. o.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum: erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur .n. incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat. 26. decimi.



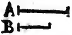
SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8. viij. o.

SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas in-



a 5. decimi

commenſurabiles eſſe. Si enim A, & B, credantur eſſe commẽſurabiles; a erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commenſurabiles ſunt A, & B. Quocirca ſi duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVOD ſi lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipſæ neceſſario, ex hoc theoremate, longitudine incommenſurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propoſ. 5. huius lib. demonſtrauimus, quod eſt contra hypotheſim. Non autem colligendum eſt ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, neceſſario potentia incommenſurabiles eſſe, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione. Non enim ſequitur, ſi potẽtia tantum ſint commenſurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonſtratione theorematis aſſumitur; immo nullo modo talem proportionem habere poſſunt; vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonſtratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine eſſe incommenſurabiles.

LEMMA.

SI ſint tres quantitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoque proportionales; ſitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundam.

SINT continuæ proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; ſiue priores in eodem

genere

genere sint, in quo posteriores, siue non; sitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B; quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem eorum proportiones duplicatæ æquales sunt.



D, 49;
E, 42.
F, 36.

IDEM sequitur, si plures quantitates sint, quàm tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonstrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

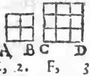
THEOR. 1. PROPOS. 9. vij.

QVAE a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ vero a rectis lineis longitudine incõmensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum

nume-

numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

SINT primum rectæ A B, C D, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex C D, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ. Quoniam enim rectæ A B, C D, longitudine sunt commensurabiles; a erit A B, ad C D, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, numerus ad numerum F: b habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex C D, duplicatam proportionem lateris A B, ad latus C D: c Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex A B, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ sunt proportionum æqualium. Quod est propositum.

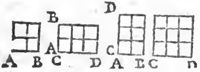


a 5. decimi.

b 20. sexti.

c 11. octaui.

ALITER. Posita eadem constructione, contineatur rectangulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt constat ex demonstratione propos. 11. lib. 8. atque adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam



igitur

igitur est A B, ad C D, vt E, ad F: [a] Vt autem A B, ad C D, ita est quadratum ex A B, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem A B, si C D, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad rectangulum B D, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est A B, ad CD, vt E, ad F, [b] Vt autem AB, ad C D, ita est rectangulum BD, ad quadratum ex C D, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum B D, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulum B D, & quadratum ex CD, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum. a 1. sexti b 1. sexti

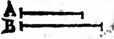
SIT secundo quadratum ex A B, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas A B, C D, esse longitudine commensurabiles. Sint. n. numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex B D, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: [c] Habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex C D, proportionē duplicatam lateris AB, ad latus CD. [d] Item & quadrus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatā lateris E, ad latus F: erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum rectæ AB, CD, proportionem habeant, quam numeri E, F, [e] ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum. c 20. sex d 11. oct. e 6. dec.

ALITER. Repetatur constructio figuræ posterioris. [f] Quia igitur est vt AB, ad CD, ita quadratum ex AB, ad rectangulū BD; Item vt AB, rursum ad CD, ita rectāgulū BD, ad quadratum ex CD, vt supra diximus; erūt quadratū ex AB, rectangulum BD, & quadratū ex CD, continue f 1. sexti

pro-

proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineam CD. Sunt autẽ & numeri G, I, H; continue proportionales in rõne numeri E, ad numerum F, vt supra ostẽdimus; poniturq; quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc est, vt E, 26. dec. ad F; a ideoque AB, CD, rectæ proportionem habentes, quam numeri E, F, commensurabiles sunt longitudine. Quod est propositum.

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si



enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commensurabiles, vt iam est demonstratum. Quod est absurdum: ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ. Quod est propositum.

QVARTO, ac postremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles credantur, habebũt earum quadrata, vt est demonstratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: quod est absurdum. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Igitur quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est; rectas lineas, quæ longitudine sunt cõmensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ

longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum. vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum: a ipsa commensurabilia erunt; b Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia cõmensurabiles sunt. a 6. dec. b 3. defi.

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionẽ non habẽt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quã numerus simpliciter ad numerum, c potentia quidem commensurabiles sunt, d cum earum quadrata commensurabilia sint: at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim eæ lineę potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda partę huius theorematis. c 3. defi. d 6. dec.

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modo diximus, liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse. solum enim eæ lineæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, e potentia quoque incõmensurabiles sunt, f cum earum quadrata incommensurabilia sint. e 4. defi. d 8. dec.

POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineę potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

S C H O L I V M.

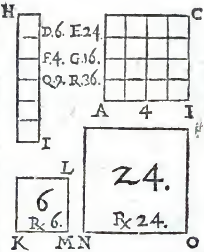
VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter cõsiderãda sunt hæc, quæ sequuntur. Primũ lineas rectas longitudine commensurabiles, quarũ quadrata, ex prima parte theorematis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, non solum esse eas, quæ numeris expri-

mi possunt, si cũ linea Rationali proposita compararentur; quales sunt illę, quę in demonstratione sunt positę; (est enim recta AB, 2. & CD, 3.) verum etiam illas, quę nullis possunt numeris efferri, si cũ Rationali linea proposita conferantur: Deinde e contrario, quadrata inter se proportionẽ habẽtia, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ, quorũ lineę, seu latera ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quę continẽt totidem quadratas mensuras ęquales illis, in quas quadratũ Rationalis lineę resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demõstratione descripta; (continet enim quadratum ex AB, quatuor mẽsuras quadratas, & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quę vel pauciores, vel plures mẽsuras quadratas complectũtur, quã sunt vnitates in numeris illis quadratis, si cũ quadrato lineę Rationalis conferãtur. Sępe numero enim lineę datę cõmensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali lineę propositę sũt lõgitudine incommẽsurabiles; Ac propterea quadrata illarũ proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratũ numerũ, vt in hoc theoremate est ostensũ, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continẽt, quam sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hęc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR *linea Rationalis AB, expressa numero 4. cuius quadratum AC, continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani similes non quadrati,* a26.oct. *habentes tamen proportionem, a vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus numerus F, ad quadratũ numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum HI, constans ex sexquadratis mensuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur;* b14.sec. *b atque ipsi HI, quadratum ęquale constituatur KL, cuius latus KM. Postremo per ea, quę in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta NO, ad cuius quadratũ NP, ita se habeat KL, quadratũ rectę KM, vt numerus D, ad numerũ E,*

vel

vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum KL, ad quadratum NP, per constructionem; continet autē quadratum KL, 6. mensuras quadratas, qualiū 16. continet quadratum Rationale AC: (constructū enim est quadratum KL, æquale rectangulo HI, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris) continebit quadratū NP, earundē mensurarū quadratarū 24. ac propterea KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erūt Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cū 6. & 24 non sint numeri quadrati, eruntq; lineæ Rationali AB, longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata KL, NP, proportionē habeāt, ex coroll. propos. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM, NO, sit autem quadratorū proportio subquadrupla, nempe 1, ad 4. erit proportio laterū subdupla videlicet 1. ad 2. Huius enim illa duplicata est, vt hic apparet 1. 2. 4. a Quare longitudine cōmensurabiles sunt rectæ KM, NO. cum proportionem habeant, quam numerus ad numerū. Intelligendæ sunt ergo in hoc theoremate lineæ etiā illæ longitudine cōmensurabiles, quæ numeris non possunt exprimi, si cū linea Rationali comparētur. Quod si considerentur eædē lineæ KM, NO, simpliciter, & absolutè, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cū enim proportionē habeant subduplam, si KM, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur NO, in eiusdem magnitu-



a 26. dec.

gnitudinis partes 4. si illa in 3. secabitur hac in 6 &c. At vero hæ partes nullo modo æquales sunt partibus lineæ Rationalis AB, immo illis omnino sunt longitudine incommensurabiles, vt diximus.

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerũ G, plures quadratas mensuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, resoluitur, quã vnitates sunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æquale est sex huiusmodi mensuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportione sumantur Q, R, pauciores tales mensuras complectuntur quadrata KL, NP, quam sunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cum alter ex 9. alter vero ex 36. vnitatibus constituatur; manifestum est, in hoc theoremate intelligẽda quoque esse quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quam vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur cum quadrato lineæ Rationalis propositæ. Quod si eadẽ quadrata KL, N P, considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati A C, ex Rationali linea AB, descripti, resolui poterunt in totidem mensuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nam si recta KM, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum est, continebit quadratum KL, quatuor mensuras quadratas, & quadratum NP, sexdecim, quot scilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, si eadem lineæ secentur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mensuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiusmodi mensuræ nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, resoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumque lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam

numeri

numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamuis interdum Rationali lineæ incommensurabiles sint, vt sit sensus. Quadrata quæ describuntur à rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles lineæ Rationali proposita, proportionem inter se habent, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ, quãuis ipsa quadrata, si cũ quadrato Rationalis lineæ conferantur, sæpe numero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habẽtia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue hæc quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi lineæ Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus; Nulla autem proportio dupla eadẽ esse põt, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionẽ habentes nullus medius cadat proportionalis; ut in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus in vno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

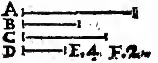
THEOR. 8. PROPOS. 10. xj. x.

SI quatuor magnitudines propor tio-

nales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit cõmenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis; & tertia quartæ incommenſurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, ſitque A, prima ſecundæ B, comenſurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commenſurabilem eſſe. Quoniam enim A, & B, inter ſe commenſurabiles ſunt, a habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum, nempe, quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D:

a 5. deci.



Igitur & C, ad D, proportionem habet, quam numerus E, ad numerum F. b Quare C, & D, commenſurabiles inter ſe ſunt.

b 6. dec.

SED ſit iam A, ipſi B, incommenſurabilis. Dico & C, ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Quoniam enim A, & B, incommenſurabiles ſunt, c non habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportiõnem habet, quam numerus ad numerum. d Quare C, & D, incommenſurabiles ſunt inter ſe. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

c 7. dec.

d 8. deci.

SCHOLIVM.

QVOD ſi quatuor propoſitæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem ſecundæ commenſurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commẽſurabilis, vt ex demonſtratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo oſtendemus, poſteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, longitudine commenſurabiles ſunt.

SI autem prima ſecundæ fuerit commenſurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commen-

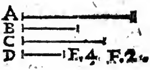
ſurabilis

ſurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commenſurabilis eſt potentia ipſi B, a erunt earum quadrata commenſurabilia, b ac propterea proportionem habebunt quã numerus ad numerum. c Eſt autem, vt quadratũ ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ propoſitæ A, B, C, D, proportionales ſint, & earum quadrata figuræ ſimiles ſimiliterque deſcriptæ.) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. d Quare commenſurabilia erunt; e Ac propterea lineæ C, D, potentia commenſurabiles. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita manifeſtum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum ſint commenſurabiles potentia tantum, longitudine incommenſurabiles ſunt: non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt C, D, ex ſcholio propoſ. 8. huius lib. Sunt autẽ potentia commenſurabiles, vt oſtendimus: Igitur potentia tantum ſunt commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

a 3. def.
b 5. deci.
c 22. ſex.
d 6. deci.
e 3. def.

EADEM ratione, ſi prima ſecundæ ſit incommenſurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommenſurabilis. Nam ſi A, & B, ſint longitudine tantum incommenſurabiles; erunt ipſarum potentiæ commenſurabiles; ac propterea ipſæ potentia tantum commenſurabiles erunt. Igitur, vt nunc oſtendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commenſurabiles; Ac idcirco longitudine tantum incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

RVRSVS ſi quatuor magnitudinũ priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ ſuperficies, vel ſolida; ſequetur nihilominus, ſi lineæ ſint longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles, & reliquas duas magnitudines cõmenſurabiles, vel incommenſurabiles eſſe. Si enim lineæ lõgitudine ſint commenſurabiles, erit earũ proportio, quæ numeri ad numerum, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandem, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ nume-



a 6.deci. *ri ad numerum; a atque adeo commensurabiles erunt. Si vero lineæ longitudine incommẽsurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinũ eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit,*
b 8.dec. *quæ numeri ad numerum. b Quare incommensurabiles erunt. Quod est propositum.*

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero duæ, lineæ, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidaue commensura-
c 5.dec. *bilia sint, c habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipsis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerũ; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt, per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8 huius lib. Quod est propositum.*

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nã huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum nu-

merum, vt in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeāt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli. n. horum primorum acceptorum proportionem inter ſe habent, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 8. quàm numeri quadrati ad numeros quadratos, cùm non ſint plani ſimiles, vt ad finem lib. 8. docuimus.

A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non ſimilium, qui videlicet proportionem non habeant, quā quadratus numerus ad quadratum numerum, non rectè quidā tradiderunt hoc loco, inter quos etiam eſt Federicus Cōmandinus. Quod vt oſtendamus, adducenda eſt eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conātur. Ita igitur rem expediūt.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non ſit ſicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perſpicuum igitur eſt E, F, numeros planos eſſe, planos autem diſſimiles; quoniā latera proportionalia non ſunt. quod facere oportebat.

A, 2.	C, 3.
B, 6.	D, 16.
E, 12.	F, 48.

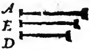
HAEC eſt eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non ſimilium. Errant autem huiuſmodi interpretes, quia ſæpe numero inuenti numeri ſecundum eorum doctrinam, plani ſimiles ſunt. Nam numeri ex eorum demonſtratione inuenti, 12. & 48. ſunt plani ſimiles, cum proportionē habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemque prior nu-

merus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. vt constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis. 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quacunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunque duobus lateribus alterius. qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

x. PROBL. 3. PROPOS. 11.

xj. PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Deinde ex corollario propos. 6. huius



B, 10. lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratũ *C, 6.* ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit quam numerus quadratus ad numerum quadratũ. a Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quod autem tantum longitudine sint incommensurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, b ipsa cõmensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione potentia

a 9. dec.

b 6. dec.

com-

commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt.

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis lõgitudine,& potẽtia. a Inueniatur recta E,inter rectas A,& D,longitudine tantum incommensurabiles,media proportionalis. Dico E,ipsi A,incommẽsurabilem esse longitudine,& potentia. Quoniam enim est quadratum ex A,ad quadratum ex E,per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A,ad D; & A,incommensurabilis est lõgitudine ipsi D, vt iam est ostensum: b erit & quadratum ex A,incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E,ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib.& omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E,ipsi A, incõmensurabilis longitudine & potentia. Quocirca propotæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas,&c. Quod erat demonstrandum.

a 13. sex.

b 10. dec

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta D, per defi.6. Rationalis, quia potentia illi est cõmensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis ex defin.7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CAETERVM ex demonstratione huius theorematis liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potẽtia; atque adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarũ statuatur Rationalis. Ex eo enim quod recta A,D, sunt longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem esse, ipsi incommensurabilem longitudine, & potentia; Eedemque argumento ostendemus, eandem longitudine, & potentia ipsi

D, esse incommensurabilem. Cum enim recta D, E, A, sint B, 10. cõtinuę proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, C, 6. ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Est autem recta D, recta A, incommensurabilis



a10.dec *longitudine. a Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare recta, D, & E, ex defin. incõmensurabiles sunt potentia. atque adeo & longitudine, per coroll. propos. 9 huius lib.*

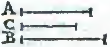
IN codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedẽti propositione decima demõstretur. vt ex dictis appareт

xij.
viij.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVAE eidem magnitudini sunt cõmensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

SIT vtraq; magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles.
b5.dec. Cum enim A, & C, sint commensurabiles, b habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, c sumanturque tres numeri
c4.oct. H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitque H, ad I, vt D, ad E, hoc est, vt A, ad C: & I, ad K, vt F ad G, hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I, & C, ad B, vt I ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem
d6.dec. habentes, quam numeri H, K, d inter se commensurabi-



les sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

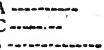
QVOD si magnitudines A,B,C, sint lineæ, atque A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoque A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cũ enim A, & C, sint potentia commensurabiles, a erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G; b Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E; & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus: erit rursum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K. c Quare quadrata ex A, & B, cõmensurabilia sunt; atq; adeo lineæ A, B, potentia cõmensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tãtum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ, longitudine inter se commensurabiles, licet vtraque cuipiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia vero tantum Rationali expositæ commensurabiles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

a 25. dec
b 4. oct.
c 6. dec

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiã cõmẽsurabilis; erit & reliqua eidẽ cõmensurabilis.

A
C
B



SINT enim A, & B, commensurabiles, sitque A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine cõmensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At vero si lineæ A, & B, potentia tantum sint commensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tãtum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraque B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si A, ipsi C, commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraq. B, C, ipsi A longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.

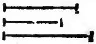
xij. o.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incõmensurabiles esse.

A
C
B



SI enim B, dicatur esse cõmensurabilis ipsi A: cum eidem A, commensurabilis ponatur C; a erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi

a 12. decimi.

A, com-

A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, [a] ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commẽsurabilis, siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis: erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis. a 12. dec

QVONIAM vero hac propositio 13. apud Theonem lemma est, fit, vt posthac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

THEOR. 11. PROPOS. 14. xiij. viij.

SI sint duę magnitudines commensurabiles; altera autẽ ipsarum magnitudini cuipiã incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C, Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cum & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; [b] erunt & A, C, inter se b 12. dec



com-

commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi C, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duę magnitudines commenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.

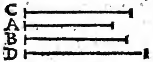
SCHOLIVM.

HIC, quoque, ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, commenſurabiles longitudine; ſit autem A, ipſi C, ſiue longitudine tantum, ſiue longitudine & potentia incommenſurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommenſurabilis. Si
a12.dec. *enim B, & C, eſſent longitudine commenſurabiles, a eſſent quoque A, & C, commenſurabiles longitudine. (cum hoc poſito, vtraque A, & C, ipſi B, longitudine eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum. ponitur enim A, ipſi C, longitudine incommenſurabilis. Quod ſi A, & B, commenſurabiles ſint potentia tantum, & A, ipſi C, potentia incommenſurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipſi C, potentia incommenſurabilem eſſe. Alias ſi B, C, potentia eſſent commenſurabi-*
b12.dec. *les; b & A, C, potentia commenſurabiles eſſent. (cum hoc poſito, vtraque A, C, ipſi B, potentia eſſet commenſurabilis.) Quod non ponitur.*

COLLIGVNT porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis ſequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonſtrantur, perutile.

QVAE incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles, & inter ſe incommenſurabiles erunt.

SINT dua magnitudines incommenſurabiles A, B, quibus commenſurabiles ſint C, & D, nempe C, ipſi A, & D, ipſi B. Dico C, & D, inter ſe incommenſurabiles eſſe. Quoniam



enim A, & C, commenſurabiles ponuntur, & eſt A, ipſi B, incom-
c14.dec. *menſurabilis; c erit quoque reliqua C, eidem B, incommenſurabilis. Rurſus quia D, & B, commenſurabiles ponuntur, &*
d14.dec. *eſt B, oſtenſa ipſi C, incommẽſurabilis; d erit & reliqua eidẽ C, incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum.*

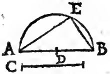
SI

SI autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si vero A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantum commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; vt perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostẽderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamẽ quia hic breuius ex ijs, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicauimus, idẽ hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, et C, quarum AB, maior, oporteatque inuenire, quo AB, plus possit quam C. Diuisa AB, bifariã in D, describatur ex centro



D, & interuallo DA, vel DB, semicirculus AEB, [a] in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, iungaturq; recta EB. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectæ EB. [b] Cum enim angulus E, in semicirculo rectus sit; [c] erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc est, quam C, quadrato rectæ EB. Quod est propositum. a 1. quarti. b 31. tertii. c 47. primi.

Similiter

DVABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

HOC etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura datæ duæ rectæ AE, EB, quæ si coniungantur ad angulũ rectũ E, poterit eas recta ducta AB, [a] quippe cum quadratum ex AB, æquale sit quadratis ex AE, EB.

[a] 47. primi.

xiiij. xij.

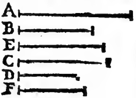
THEOR. 12. PROPOS. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quãtum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, possitque A, prima plus quam B, secunda, quadrato rectæ E; & C, tertia plus possit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilem esse longitudine ipsi C: Si

vero E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A; & F ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D; a erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratu m ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothesim; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; b Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F; erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

a 22. sexti.



b 22. sexti.

SCHOLIVM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantũ commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantum ipsi C, esse commensurabilem, vt constat ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius lib. scripsimus.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

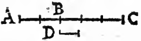
XV. IX.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ a principio ma-

gnitu-

gnitudines commenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines commenſurabiles AB,BC. Dico totam quoque magnitudinẽ AC,vtrique ipſarum AB,B C, commenſurabilem eſſe.[a] Sit enim ipſarum A B, B C, communis menſura D.



a 3.dec.

b 1.pro.

AB

Quoniam igitur D, ipſas A B, B C, metitur,[b] metietur quoque D,totam AC,ex ipſis compoſitam. Cum ergo D, metiatur AC,& AB; erunt AC,AB,commenſurabiles: Similiter cum D,metiatur AC,& BC;erunt & AB,BC,cõmenſurabiles; Ac propterea A C, vtrique ipſarum A B, B C, commenſurabilis erit.

c 3.deci.

d 9.pro.

SED iam tota AC,ex AB, BC, compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum AB,BC,nempe ipſi AB. Dico & AB,BC,inter ſe commenſurabiles eſſe.[c] Sit enim D,communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D,metitur totam AC,& ablatam AB;[d] metietur quoque D,reliquam BC. Quare cum D,metiatur AB,BC;commenſurabiles erunt AB,BC,inter ſe. Eodem argumento oſtendemus AB,BC,eſſe commenſurabiles,ſi AC.ipſi BC, fuerit commenſurabilis. Si duę igitur magnitudines commenſurabiles componantur,&c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

HINC ſequitur,ſi tota magnitudo ex duabus compoſita,commenſurabilis ſit alteri ipſarum,eandẽ & reliquæ commenſurabilẽ eſſe. Vt ſi AC,ipſi AB,ſit cõmenſurabilis,eſſe quoque eandẽ AC,reliquæ BC,commenſurabilem. Nam vt in poſteriori parte theorematis oſtẽſum eſt,ſemper D,communis menſura totius AC,& ablatæ AB,cum metiatur totam AC,& ablatam AB,metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commenſurabiles ſunt AC, B C. Quod eſt propoſitum.

xvj.
ix.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duę magnitudines incommenſurabiles componantur,& tota magnitudo vtri-

que

que ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoq; magnitudinem AC, vtrique ipsarum AB, BC, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis; si fieri potest,



nempe ipsi AB, a sitque D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; b metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur vtramque AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incõmensurabiles. Non ergo cõmẽsurabilis est AC, ipsi AB: Eadẽq. ratione neq. ipsi BC, commensurabilis erit. Quare vtriq. ipsarũ AB, BC, incommensurabilis est.

a 3. dec.

b 3. pro.

SED iam tota AC, composita ex AB, BC, incommensurabilis sit vni ipsarum componentium, nempe ipsi AB. Dico quoque AB, BC incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles, c erit quoque tota AC, vtrique ipsarum AB, BC, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim AC, alteri ipsarum, nempe ipsi AB, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt AB, BC. Eodem argumento ostendemus AB, BC, incomensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

c 16. dec.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquę incommẽsurabilem esse. Nempe si AC, incommensurabilis sit ipsi AB, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, incommensurabilem. Si enim AC, ipsi BC, foret commensurabilis, esset quoque AC, ex coroll. præcedentis propos. reliquę AB, commensurabilis. Quod est absurdum: ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo AC, ipsi BC, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

S C H O L I V M I.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.

L E M M A I.

SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

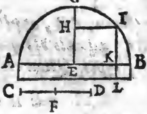
HOC lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

L E M M A I I.

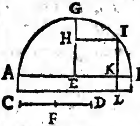
DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartã partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos. 28. lib. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectãgulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficienteque figura quadrata, vt vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptum, (quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. lib. 2.) minus sit quadrato ex dimidia parte maioris descripto; (quod quidem appli-

catum est ad dimidium maioris, deficitque figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc possit per propos. 28. lib. 6. libet tamen idipsum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AB, CD, quarum AB, maior sit, oporteatque ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum æquale sit quartæ parti quadrati ex recta CD, descripti.



Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, et interuallo EA, vel EB, semicirculus AGB; & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quam tota CD, erit quoque AE, dimidia ipsius AB, hoc est EG, ipsi AE, æqualis, maior quã CF, dimidia ipsius CD. Posita igitur EH, æquali ipsi CF, agatur per H, ipsi AB, parallela HI, demittaturque IKL, ad AB, perpẽdicularis, & sit KL, ipsi KB, æqualis; Ac tandẽ perficiantur rectangulũ AL, & quadratũ BL. Dico parallegrammũ AL, applicatum ad rectã AB, deficiẽs figura quadrata BL, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniã .n. KI, media proportionalis ẽ inter AK, KB, vt in scholio propos. 13. lib. 6. tradidimus; [a] erit rectãgulũ sub AK, KB, hoc est, rectangulũ AL, æquale quadrato ex KI, hoc est, quadrato ex EH; [b] (est .n. KI, ipsi EH, æqualis, ob parallelogrãmũ EI,) hoc ẽ, quadrato ex CF: Est aũt qua- [a] 17. sexti. [b] 34. primi.



dratum ex CF; quarta pars quadrati ex CD; quod quadratum ex CD, per scholium propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex CF. Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum deficiensque qudrato BL, æquale est quartæ parti quadrati ex CD, descripti. Quod est propositum.

SCHOLIVM II.

EX hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

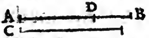
DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum.

SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex CF, non maius quam quadratum ex dimidia AE, ita vt latus CF, non maius sit latere AE. Educta ergo ad AB, perpendiculari EG, sit EH, æqualis ipsi CF. Deinde acta HI, parallela ipsi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus peractis ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus AK, KB, æquale esse quadrato ex IK, hoc est, quadrato ex CF, atque adeo & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta CF, maior quam recta EG. Quare ex EG, abscindi non posset recta ipsi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C; & ad maiorem AB, applicetur parallelogrammũ deficiens quadrato, sitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita vt DB, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatũ deficit. Dico segmenta AD,



DB, inæqualia esse. Si enim AD, DB, segmenta dicantur esse æqualia; cum ex 1. lemmate parallelegrammum applicatũ ad AB, deficiensque figura quadrata ex DB, descripta, æquale sit rectangulo sub AD, DB; sit autẽ quod sub æqualibus AD, DB, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratũ ex AD, dimidio ipsius AB, descriptũ; atque adeo ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex AB, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autẽ & quadratum ex C, per hypothesim, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex AB, & C, æqualia sunt, atq; rectæ AB, & C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur .n. inæquales, & AB, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta AD, DB. Quod est propositum.

HOC facile etiam apparet ex constructione

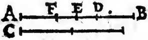
problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per constructionem, EH, æqualis dimidiatæ parti ipsius CD, nempe ipsi CF, ductaque HI, parallela ipsi AB, & tandem demissa perpendicularis IK, vt partes factæ ex applicatione sint AK, KB; manifestum est AK, KB, segmenta esse inæqualia, cum AB, in E, secta sit bifariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

xvij. xiij. THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: maior tanto plus poterit quã minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT

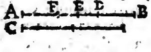
SINT duæ rectæ inæquales AB,& C, quarum maior AB, quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad AB, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub AD, DB, faciatque segmenta AD, DB, longitudine commensurabilia. Dico AB, plus posse quã C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniã enim per 3.



lemma præcedẽtis propos. AD, maior est, quã DB; diuidatur AB, bifariã in E, & ipsi ED, æqualis sumatur EF. Quo facto, cum totæ EA, EB, æquales sint, & ablatæ quoque EF, ED, erunt & reliquæ AF, BD, æquales. Et quia recta AB, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D, a erit rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale quadrato ex EB; Ac propterea quadruplum rectanguli sub AD, DB, & quadrati ex ED, æquale erit quadruplo quadrati ex EB, Est autem quadruplo rectãguli sub AD, DB, æquale quadratũ ex C; (Ponitur enim rectangulum sub AD, DB, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex ED, æquale est quadratum ex FD, (quadratum enim ex FD, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex ED, cum FD, dupla sit ipsius ED,) & quadruplo quadrati ex EB, æquale est quadratum ex AB, (quod quadratum ex AB, quadruplum sit per scholiũ propos. 4. lib. 2. quadrati ex EB, dimidiata parte ipsius AB.) Igitur & quadrata ex C, & FD, æqualia sunt quadrato ex AB: Ac proinde recta AB, plus potest quam recta C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur FD, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi AB. Quoniam rectæ AD, DB, longitudine ponuntur commensurabiles: b erit quoq: tota AB, parti DB, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi DB, composita ex DB, AF, longitudine commensurabilis; (quod composita ex DB, AF, dupla sit ipsius DB,) Igitur cum vtraque AB, & composita ex DB, AF, longitudine sit commensurabilis ipsi DB, c erunt quoque AB, & composita ex DB, AF, longitudine inter se com-

a 5. sec.
b 16. dec.
c 12. dec.

mensurabiles; Ac propterea cum A B, composita ex A F, DB, tanquam vna, & ex FD, commensurabilis sit longitudine compositæ ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. propos. 16. huius lib. commensurabilis longitudine reliquæ FD. Ergo AB, plus potest quam C, quadrato rectæ FD, longitudine sibi commensurabilis.



SED iam AB, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectę longitudine sibi commensurabilis; erit recta A B, ipsi FD, longitudine commensurabilis. Igitur cum tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine commensurabilis reliquæ compositæ ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum ipsius sit dupla: Igitur cum vtraque A B, D B, longitudine sit commensurabilis
a12. dec compositæ ex AF, DB;[a] erunt quoque AB, DB, longitudine inter se commensurabiles; Atque adeo cum tota AB, composita ex AD, DB, commensurabilis sit longitudine
b16. dec ipsi DB;[b] erunt ipsæ A D, DB longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

xviij. xiiij.

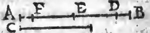
THEOR. 16. PROPOS. 19.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem aplicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine

ipsam

ipsam diuidat; maior tanto plus poterit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB; quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad AB, per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammũ æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta AB, partes AD, DB, longitudine incommensurabiles. Dico AB, plus posse quam C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim quæ supra constructis,



similiter ostendemus AB, plus posse quam C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ AD, DB, ponuntur longitudine incommensurabiles; [a] erit quoque tota AB, parti DB, longitudine incommensurabilis. Sed DB, longitudine commensurabilis est compositæ ex DB, AF, cum hæc illius sit dupla. Igitur cum duarũ linearum commensurabilium DB, & quæ componitur ex DB, AF; ipsa DB, longitudine sit incommensurabilis rectæ AB: [b] erit quoque reliqua composita ex DB, AF, eidem AB, longitudine incõmensurabilis: Ac propterea cum AB, composita ex AF, DB, tanquam vna, & ex FD incommensurabilis sit longitudine compositæ ex AF,

a 17. decimi.

a 14. decimi.

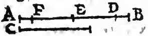
DB,

DB, erit eadem AB, per coroll. propoſ. 17. huius lib. & reliquæ FD, longitudine incommenſurabilis. Ergo AB, plus poteſt quam C, quadrato rectæ FD, longitudine ſibi incommenſurabilis.

IAM vero AB, plus poſſit quam C, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & quartæ parti quadrati ex C æquale parallelogrãmũ applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque in recta AB, partes AD, DB Dico & rectas AD, DB, eſſe incommenſurabiles longitudine. Iiſdem enim conſtructis, oſtendemus vt prius, rectam AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus poſſe, quã C, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis: erit AB, ipſi FD, incommenſurabilis longitudine. Igitur cum tota AB, compoſita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, longitudine incommenſurabilis ſit ipſi FD; erit eadem AB, per coroll. propoſ. 17. huius lib. & reliquæ compoſitæ ex AF, DB, longitudine incommenſurabilis: Eſt autem compoſita ex AF, DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis, cum illa huius ſit dupla. Igitur cũ duarũ linearum commenſurabilium, nempe quæ ex AF, DB,

a 14. de, componitur, & DB, ipſa compoſita ex AF, DB, longitudine incommenſurabilis ſit rectæ AB, [a] erit & reliqua DB, eidem AB, longitudine incommenſurabilis: Ac proinde cũ tota AB, commpoſita ex AD, DB, incommenſura

17. dec. bilis ſit ipſi DB, longitudine; [b] erunt & ipſæ AD, DB, longitudine inter ſe incommenſurabiles. Quam ob rem ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM. I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commenſurabilibus, & incommenſurabilibus; nunc ad Rationales & Medias tranſit in ſequentibus.

LEMMA. I

QVONIAM demonſtratum eſt, lineas lon

gitudi-

gitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia vero commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari; & ipsi commensurabilē non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si vero expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commēsurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potētia, longitudine fuerit incommēsurabilis, dicetur & sic Rationalis, potentia tantū ipsi commensurabilis.

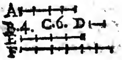
LEMMA II.

EX PROCLO. *Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potētia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incōmensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solum: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se cōmensurabiles, vt intelligatur, etiā potentia cōmensurabiles esse; Si vero potētia inter se so-*

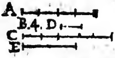
lum sunt commensurabiles: dicuntur ipsæ quoque Rationales, potentia solum inter se commensurabiles.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearũ Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera æqualis est exposita Rationali; ac proinde vtraque Rationali commensurabilis quoque longitudine; Aut neutra Rationali exposita æqualis est, longitudine tamẽ ei vtraq; est cõmensurabilis: Aut deniq; vtraq; exposita Rationali commensurabilis est solũ potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit exposita Rationalis A, diuisa in quatuor partes, quot nimirum vnitates sunt in numero B. Sũpto deinde quolibet alio numero C, sit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandã aliã E. Item quoties vnitas est in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales sũt ipsi D; ipsæ æquales erũt. Rursus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commensurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensæ lõgitudine inter se commensurabiles, cum habeant D, communem mensuram. Inuenta ergo sunt duæ Rationales E, F, longitudine commensurabiles & inter se, & exposita Rationali A, & quarũ vna nẽpe E, æqualis est Rationali expositæ A.



IAM vero D, metiatur duas lineas quasdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem sit qui B, ita vt vtraq; linea C, & E, inæqualis sit ipsi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, mensuram habentes communem D, longitudine commensurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitu-



dine

dine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles; inuenta erunt duæ Rationales C, E, longitudine commensurabiles & inter se, & exposita Rationali A, quarum neutra æqualis est Rationali exposita A.

POSTREMO *exposita Rationali A*, a *inueniatur recta B, longitudine tantum incommensurabilis, quæ secetur in quotcunque partes æquales, & sumatur C, composita ex alijs quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales sint partibus rectæ B. Quo facto, erũt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico easdẽ exposita Rationali A, potentia solum esse commensurabiles. Quoniam enim A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeo & potentia;* b *Igitur quadrata rectarum A, & C, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare C, ipsi A, potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis;* c *erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solum potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationali exposita A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuenta erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia vero tantum commensurabiles exposita Rationali A. Quod est propositum.*

a 11 dec.



b 12. dec.

c 14. dec.

QVOD *si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo, Sumpta mẽsura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt vnitates in totidẽ numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.*



E, 5.
F, 5.
G, 4.

CAETERVM & *omnes lineas Rationales, non solum*

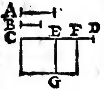
expo-

exposita Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles,
6.defi. *facile hoc modo demonstrabimus. a Quoniam Rationales lineæ sunt, quæ exposita Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; b quæ autem*
12.sex. *eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunque inter se commensurabiles esse.*

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundã, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacunque .n. linea recta CD, abscindatur CE, ipsi A, æqualis, & EF, ipsi B. Deinde super CE, describatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum GF, contentum sub CE, & EF,



1.sexti *hoc est, sub A, & B. c Quoniam igitur est vt CE, ad EF, hoc est, vt A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, sub A, & B, comprehensum; perspicuũ est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primã ad secundã, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.*

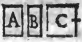
EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulum

ulum FG, ad quadratum GC. Quod est propositum.

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

SIT ſpatium A, commenſurabile Rationali ſpatio B. Dico & A, Rationale eſſe. Sit namque C, quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, *quod nimirum ab expoſita Rationali deſcribitur. Quoniam igitur B, Rationale eſt,*[a] *erit ipſum Rationali C, commenſurabile: Eſt autem & A, ipſi B, commenſurabile. Igitur A, & C, cum commenſurabilia ſint ipſi B,*[b] *inter ſe quoque cõmenſurabilia erunt; ac proinde ſpatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expoſita deſcripto commenſurabile,*[c] *Rationale eſt. Quod erat demonſtrandum.*



a 9. def.
b 12. dec
c 6. def.

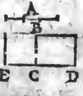
THEOR. 17. PROPOS. 20. xix. xv.

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale eſt.

SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulum BD, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus BC, CD, ſecundum aliquem prædictorum modorum. (hoc eſt, ſecundum aliquem trium mo-

dorum

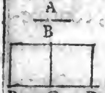
dorum, quos in scholio 2. antecedentis propos. explicuimus; ita vt vel altera ipsarum BC, CD, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantum. Dico BD, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur



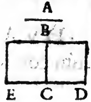
BC, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est
a 3. def. vel longitudine & potentia, vel potentia solum; [a] erit quoque quadratum BE, ex BC, descriptum quadrato ex
b 8. def. A, commensurabile: [b] Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irra
c 9. def. tionalia. [c] Igitur & BE, illi commensurabile, Rationale est. Quia vero BC, hoc est, EC, & CD, lõgitudine cõmensurabiles sunt, (ponũtur n. BC, CD, Rationales inter se longi
d 1. sexti tudine commensurabiles.) [d] & est vt EC, ad CD, ita EB,
e 10. dec ad BD; [e] erunt quoque EB, BD, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propos. BD, Rationali BE, commensurabile; Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

xx.
xvj. SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.



SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis BC, secundum aliquẽ modorum, quos in scholio 2. propositionis 19. exposuimus, hoc est, siue BC, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Di



o CD, Rationalem esse, & ipsi BC, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex BC, quadratum BE; quod similiter, vt in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur BE, BD, Rationalia sunt, [a] ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; [b] Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: [c] Est autē vt BE, ad BD, ita EC, hoc est, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, commensurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib docuimus. Est ergo CD, ipsi BC, cōmensurabilis longitudine; [d] sed & Rationalis, quippe quæ Rationali BC, atque idcirco Rationali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo CD, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 9. defi.
b 12. decimi.
c 1. sexti
d 6. defi.

LEMMA I.

RECTA linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.

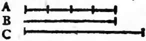
POSSIT recta A, spatium Irrationale, hoc est, quadratum ex A, æquale sit spatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem esse. Si enim dicatur Rationalis; A ——— *erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonstratione propos. 20. huius lib. ostensum est. quod est absurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis est. Igitur Irrationalis.*

HOC idem constat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes spatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

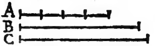
DVAS rectas Rationales potentia solum commensurabiles inuenire.

DVO genera sunt linearum Rationalium potentia tantum inter se commensurabilium. Aut.n.altera earum est æqualis expositæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit exposita Rationalis A, cui



a 11 dec. *æqualis sumatur B. Deinde ipsi B,a inueniatur C, longitudine tantum incommensurabilis, seu (quod idem est) potentia tantum commensurabilis. Quoniam igitur B,C, ipsi A, commensurabiles sunt, (B, quidem, quod ei sit æqualis; at C, ex constructione, quod inuenta sit potentia tantum incommensurabilis ipsi B, atque adeo ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia solum commensurabiles. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales B,C, potentia tantum commensurabiles, quarum altera, nempe B, expositæ Rationali A, æqualis est.*

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rursus exposita Rationalis A, cui longitudine tantum



b 11. dec. *incommensurabilis b inueniatur B; & huic rursum longitudine tantum incommensurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B,C, esse Rationales potentia tantum commensurabiles. Quod.n. sint solū commensurabiles potentia, patet ex cō-*

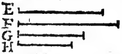
ſtructione. Quod autē ſint Rationales, ita oſtendemus. Quoniam A, C, ipſi B, potentia ſunt commenſurabiles; erunt & A, C, commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare cum vtraque B, C, expoſitæ Rationali A, ſit potētia commenſurabilis;[a] erūt B, C, Rationales. Inuentæ ergo ſunt B, & C, Rationales potentia tantum commenſurabiles. [a] 6. def.

SCHOLIVM.

QVOD ſi inueniendæ ſint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur, nempe A, B, C, D. Deinde ſumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtēdimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H.

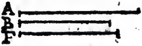
A, 5. B, 7. C. 3. D, 2.



Dico rectas E, F, G, H, Rationales eſſe, & potentia tantū commenſurabiles inter ſe. Quod enim Rationales ſint, manifeſtum eſt. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex cōſtructione; ſimiliterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C. & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; ſimiliterq; quadratum ex E, ad quadratū ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D.)[b] erūt ipſa inter ſe cōmenſurabilia; ac propterea & rectæ ipſæ potentia ſaltem commēſurabiles. Exiſtente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. [b] 6. decimi.

nales. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita oſtendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia ſunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem nō habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F,
a 9. deci. G, H, proportionem, quam numeri quadrati. a Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommeſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Rationales, & potentia commenſurabiles. Rationales igitur ſunt, & potentia tantum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi propoſitis quotcunque Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, inueniẽda ſit adhuc alia, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantum, fiet id hoc modo.



C, 10.
D, 6.
E, 7.

Sint propoſitæ duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C, D, primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facile, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propoſitionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolum commenſurabilem. Quod enim Rationalis ſit, ex eo patet, quod commeſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D,
b 6. dec. E, b commenſurabilia ſint. Cum ergo proportio D, ad E, non ſit, quā numeri quadrati ad numerū quadratum, vt ad finē lib. 8. oſtendimus; (quod D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoque plani non ſimiles, ac proinde ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. oſtendimus, proportionem non habeant,
c 9. dec. quam quadratus ad quadratum) c erunt rectæ B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantum commenſurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia ſolum commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo

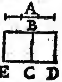
hi nume-

hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratũ; (quod ostendemus perinde, vt idem demonstrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.

THEOR. 19. PROPOS. 22. xxj. xix.

QVOD sub Rationalibus potentia solũ commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

SIT exposita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum sub Rationalibus B C. C D, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propos. diximus. (hoc est, siue altera illarum æqualis sit Rationali expositæ A, siue non.) Dico rectangulum B D, esse Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipsi BD, æquale est, Irrationalem quoque, quę vocetur Media.



Describatur enim ex altera illarum, vt ex BC, quadratum B E, quod erit Rationale, vt in demonstratione propos. 20. diximus. a Et quoniam est vt E C, hoc est, B C, ad CD, vt BE, ad BD: Est autem B C, ipsi C D, longitudine incommensurabilis, ex hypothesi; erit ex iis, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, B E, ipsi B D, incommensurabile. b Quare cum B E, commensurabile sit quadrato ex Rationali exposita A, sit autem B E, ipsi B D, incommensurabile; c erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem BD, incommẽsurabile; Ac propterea B D, quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, d Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum B D, Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis.

a 21. sexti
b 9. def.
c 14. dec
d 10. def.

VOCETVR autem hęc linea potens ipsum B D, Media, e propterea quod media proportionalis est inter e 17. sex.

duas BC,CD,Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratum ęquale sit rectangulo BD.sub ipsis BC,CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur. a17.sex *a Cum enim eius quadratum aequale sit rectangu lo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidē in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit l atus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineā Mediam facile describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hæc linea Media hoc loco appellatur.*

VT autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres lineæ sint continue proportionales, quales sunt BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio propos. 22. lib.6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum mediū proportionale est inter quadrata rectarū BC,CD, ideoque Medium appellari potest.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulū Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD. Hoc .n.

falsum

falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantum inter se commẽsurabilibus, vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocantur, rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, vt ostendimus: At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuerse tamen omne spatium Medium æquale est alteri cuipiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

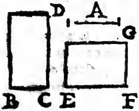
VNDE Medium describi sic poterit, vt dicamus, illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo sub duabus Rationalibus potẽtia solum cõmensurabilibus comprehenso æquale est, ita vt ipsum possit linea recta, quæ Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, vt in scholio sequentis theorematis ostendemus.

THEOR. 20. PROPOS. 23. xxij. xx.

QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis BC, siue ea sit exposita, siue expositæ commensurabilis longitudine & potẽtia,

a 45. pri vel potentia tantum a applicetúrque ad BC; rectangulũ BD, æquale quadrato ex media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale est, faciatque latitudinem CD Dico CD, Rationalem esse, & ipsi BC, longitudine incommensurabilem. Quoniam enim A, Media est, ipsa poterit rectangulum sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulum E G, sub Rationalibus EF, FG, potentia tantum commensurabilibus contentum. Et quia A, ex hypothesi, potest etiam



b 14. sex ipsum BD, æqualia erunt BD, & EG, b lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos: nem

c 22. sex pe erit vt BC, ad EF, ita FG, ad CD; c Ac propterea quoque vt quadratum ex BC, ad quadratum ex EF, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex CD: Sed quadratũ ex BC, commensurabile est quadrato ex EF. (quod rectæ BC, EF, ponantur Rationales: atque adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potẽ

d 10. dec tia tantum.) Igitur d & quadratum ex FG, commensurabile erit quadrato ex CD: propter eaq; & rectæ FG, CD, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cũ FG, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis; erit quoque CD, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atque adeo CD, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi BC. Quoniã enim EF, FG, Rationales sũt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt EF, ad FG, ita quadratũ ex EF, ad rectangulum EG, sub EF, FG, contentum, ex

e 10. dec lemmate 3. propos. 19 huius lib. e erit quadratum ex EF, incommensurabile rectangulo EG, atque adeo rectangulo BD, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex EF, commensurabile est quadrato ex CD. (quod EF, CD, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia com-

men-

mensurabiles.) Igitur cum quadratum ex CD, commensurabile sit quadrato ex EF, at rectangulum BD, eidem quadrato ex EF, incommensurabile; [a] incommensurabilia erunt quadratum ex CD, & rectangulum BD. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex CD, ad rectangulum BD, vt recta CD, ad rectam BC. [b] Incommensurabiles ergo sunt longitudine CD, & BC. Rationalis ergo est CD, & Rationali BC, longitudine incōmensurabilis. Quam ob rem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat. a 13. de. b 10. de.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad BC, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis BC, & A; [c] sumatur tertia proportionalis pro latere CD. Cū enim BC, A, & CD, proportionales sint; [d] erit rectangulum BD, sub extremis BC, CD, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A. c 11. sex. d 17. sex.

HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulū æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifestum est omne Mediū, hoc est, spatium, quod linea Media potest; æquale esse cuidam alteri rectangulo contēto sub duabus Rationalibus potentiâ tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentiâ solum commensurabilibus contentū: Atq; hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium cōtentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

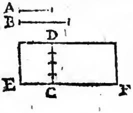
MEDIAE commensurabilis, Media est.

SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Me-

45.pri diam esse. Exposita enim sit Rationalis C D, a ad quam applicetur rectangulum DE, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem CD, applicatum, facit CE, latitudinem; b erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incommensurabilis. Rursus ad C D, Rationalem c applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale.

b 23. decimi.

c 45. pri



Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, DE, DF, commensurabilia. d Est autem vt D E, ad DF,
d 1. sexti ita recta EC. ad rectam CF. e Igitur E C, C F, longitudi-
e 10. dec ne sunt commensurabiles: Sed EC, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi C D, incommensurabilis. f Igitur &
f 14. dec C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationalis sit, propterea quod Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cum E C, CF, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, commensurabilis saltem potentia, quod Rationalis sit; erit & CF, eidem CD, commensurabilis potentia ex iis, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus,) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum com-
g 22. dec mensurabiles, g Ac proinde recta B, potens rectangulum D F, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus CD, C F, Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.

COROLLAIVM.

EX hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile Medium esse. Postquam enim demonstratum est DF, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit DF, esse quoque. Mediũ nimirum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus CD, CF, contentum. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

SIT spatium DF, spatio Medio DE, commensurabile. Dico & DF, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum DE, Medium. (Nam cum D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipsum D F.

Quo-

Quoniam igitur DE,DF,commenſurabilia ſunt,erunt quoque quadrata ex A, B,ipſis æqualia,commenſurabilia.Quare A,B,rectæ potentia ſaltem ſunt commenſurabiles ; Atque idcirco exiſtente A, Media,erit & B,illi commenſurabilis Media, vt in hoc theoremate oſtenſum eſt.Igitur & DF,Medium erit.Omne enim ſpatium, quod poteſt Media , Medium appellatur , vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus .

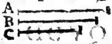
LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propoſ. 19. huius lib.de Rationalibus dictum eſt,ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commenſurabilem,dici Mediam,& ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine,ſed & potentia. Vniuerſe enim quæ longitudine commenſurabiles ſunt, etiam potentia ſunt commenſurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commenſurabilis, ſi quidem & longitudine , dicetur & ſic Media,& ipſi cõmenſurabilis longitudine & potentia. Quod ſi Mediæ rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic Media ipſi potentia ſolum commenſurabilis .

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commenſurabiles; Item duas potentia tantum commenſurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A,cui ſi inueniãtur duæ rectæ cõmenſurabiles B, C; illa quidẽ lõgitudine,hæc vero potẽtia tãtum;[a] erit vtraque B ; C, Mediæ A, [a] *24. decimi.*





commensurabilis, Media. Cũ ergo A, B, sint longitudine commensurabiles; & A, C, potentia tantum; erũt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

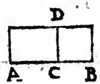
QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cum duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanã via inueniendæ sint duæ Mediæ longitudine & potentia incommensurabiles.

xxiiij. THEOR. 22. PROPOS. 25.

xxiij. QVOD sub Medijs longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.

CONTINEATVR rectangulum AD, sub Mediis AC, CD, longitudine commẽsurabilibus. Dico AD. Medium esse. Describatur ex CD, Media quadratum BD,

21. sexti quod erit medium.[a] Et quoniam est vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sũt autem AC, CB, hoc est, AC, CD, longitudine commẽsurabiles; [b] erunt AD, DB, commẽsurabilia. Quare spatium AD, Medio DB, commensurabile, Medium est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Mediis longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

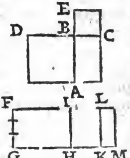


xxv. THEOR. 23. PROPOS. 26.

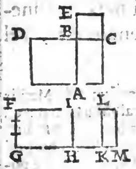
xxiij. QVOD sub Medijs potentia tantum

ommensurabilibus rectis lineis contine-
ur rectangulum, vel Rationale est, vel
Medium.

SIT rectangulum AC, comprehensum sub Mediis
AB, BC, potentia tantum commensurabilibus. Dico AC,
sse vel Rationale, vel Medium. Describātur ex AB, BC,
uadrata AD, CE, quæ Media erūt, vt in scholio propos.
2. huius lib. docuimus, cum rectæ AB, BC, Mediæ po-
antur. Exponatur Rationalis FG, a ad quam applicetur | a 45. primi.
ectāgulum FH, quadrato AD, ex AB,
lescripto æquale; & ad HI, rectangu-
um IK, rectāgulo AC, æquale; & de-
ique ad KL, rectangulum LM, æqua-
e quadrato CE, ex BC, descripto;
eritque totum FM, vnum rectangulū,
quemadmodum propos. 45. lib. 1. est
ostensum. Quia vero AD, CE. Media
unt, erunt & FH, LM, illis æqualia,
Media: quæ cum applicentur ad Ra-



ionales FG, KL, (b est enim & KL. Rationali FG, æqua- | b 34. primi.
is, ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque
atitudines GH, KM, c erunt rectæ GH, KM, Rationales, | c 23. decimi.
psi FG, seu KL, longitudine incommensurabiles. Et quia
rectæ AB, BC, potentia inter se sunt commensurabiles,
erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeo & ipsis æ-
qualia rectangula FH, LM, commensurabilia: d Vt autē | d 1. sexti
FH, ad LM, ita est recta GH, ad KM. e Igitur GH, KM, | e 10. decimi.
longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare GH,
KM, Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se com-
mensurabiles, Rationali vero FG, solum commensurabi
es potentia, cum ei ostensę sint longitudine incommen
surabiles; f Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, | f 20. decimi.
KM, Rationale est. Et quoniam est, vt DB, ad BC, ita
AB, ad BE, (quod DB, BC, ipsis AB, BE, sint æquales,
vtraque vtrique,) g & vt DB, ad BC, ita AD, ad AC; & vt | g 1. sexti
AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoque vt AD, ad AC, ita



AC, ad CE, atque adeo AD, AC, CE, proportionalia sunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, proportionalia erunt: a Habent autẽ rectæ GH, HK, KM, easdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ GH, HK, KM, proportionales sunt; b propterea q; rectangulum sub GH, KM, quadrato ex HK, æquale est. Est autem rectangulum sub GH, KM, ostensũ Rationale. Igitur & quadratum ex HK, Rationale est; ideoque & recta HK, Rationalis erit: c & ob hoc ipsi FG, Rationali expositæ, hoc est, ipsi HI, commensurabilis vel longitudine, & potentia, vel solum potentia. Et si quidem HK, ipsi HI, longitudine sit commensurabilis, d, rectãgulum HL, sub Rationalibus HI, HK, longitudine commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, erit Rationale. Si vero HK, ipsi HI, potentia solum commẽsurabilis sit, e erit rectangulum HL, sub Rationalibus HI, HK, potentia tantum commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, Medium. Est ergo AC, rectangulum sub Medijs AB, BC, potentia tantum commẽsurabilibus contentum, vel Rationale, vel Medium. Quocirca quod sub Medijs potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. sex.
b 17. sex.
c 6. desi.
d 20. dec.
e 22. dec.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propos. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipsi AC, æquale, f si tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis sumatur pro latere HK. g Nam rectangulum sub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo sub medijs AB, BC.

f 12. sex.
g 16. sex.

HAC eadem arte utemur in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Medijs potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium,

doce-

*docebit Euclides propos.28.quanam ratione inueniēda sint
dua Media potentia tantum commensurabiles, quae Ratio-
nale comprehendant: Propos. vero 29. duas Medias potentia
solum commensurabiles inquiret, qua spatium Medium
contineant.*

ITAQVE habemus ex his,[a] rectangulum contentum a20.dec
*sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus es-
se Rationales; [b] Sub duabus vero Rationalibus potentia tā-* b22.dec
*tum commensurabilibus contentum rectangulum esse Irra-
tionale, appellarique Medium, & rectam, qua ipsum potest,
Mediam. Rursus ex demonstratis constat,[c] rectangulum cō-* c25.dec
*prehensum sub duabus Medijs longitudine commensurabili-
bus esse Medium; [d] Rectangulum autem sub duabus Medijs* d26.dec
*potentia solum commensurabilibus comprehensum esse vel
Rationale, vel Medium.*

*QVOD si quis roget, qualenam rectangulum sit illud,
quod sub duabus Medijs longitudine & potentia incommē-
surabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale
esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere,
nempe aequale esse rectangulo, quod continetur sub linea
Rationali, & Irrationali, qua Media appellatur.*

*SIT enim rectangulum AC, comprehensum sub duabus
Medijs AB, BC, longitudine, & potentia incommensurabi-
libus. Dico AC, neq; Rationale esse, neq; Mediū, &c. Con-
structis enim eisdem, vt in theoremate, ostendemus similiter,
rectas GH, KM, Rationales esse, & ipsi FG, longitudine in-
commēsurabiles. Et quia recta AB, BC, ponūtur incommen-
surabiles longitudine & potentia; erūt & earum quadrata
AD, CE, atque adeo ipsis aequalia rectangula FH, LM, in-
commensurabilia.[e] Vt aūt FH, ad LM, ita est recta GH, ad* e 1.sex
rectam KM.[f] Igitur recta GH, KM, longitudine inter se f10.dec
*sunt incommensurabiles. Quare GH, KM, ostensa Rationa-
les, sunt potentia tantum inter se commensurabiles; [g] Ac* g22.dec
*propterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Irrationale est,
quod Mediū appellatur, et recta ipsū potēs, Irrationalis, qua
dicitur Media.[h] Potest autem rectangulum sub ipsis GH,* h17.sex
*KM, recta HK; (Nā vt prius ostēdemus, tres GH, HK, KM,
esse proportionales). Igitur HK, Irrationalis est, & Me-*

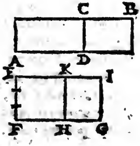
a 21. decimi. *dia. Quare IK, Rationale nō est: si enim Rationale esset, [a] faceret ipsum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine commensurabilē. Quod est absurdum. ostēsa enim est HK, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque IK, medium est; si enim esset Mediū,* b 23. decimi. *[b] faceret ipsum applicatum ad Rationalem HI, latitudinē HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine incommensurabilem, quod est absurdum. ostensa est enim HK, Irrationalis, & Media. Itaque cum IK, neque Rationale sit, neque Mediū; necessario neque AC, illi æquale, Rōnale erit, neq; Medium, sed tertium quoddam genus constituet, nempe æquale erit ipsi IK, quod sub Rationali, & Media continetur, cum HI, Rationalis sit, & HK, ostēsa Media. Ex quibus efficitur, rectam, quæ potest spatium sub duabus Medijs lōgitudine & potentia incommensurabilibus, quales ponuntur AB, BC, comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentum. Quod est propositum.*

xxvj. xxii.

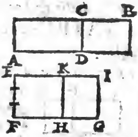
THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non superat Medium Rationali.

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, non esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, DB, Rationale. Exposita ergo Rationali linea EF, [c] ad ip- c 45. pri. sam applicetur rectangulū EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt sit reliquum HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB, AC, Media; & HI. æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, sunt applicata, [d] erunt rectæ FG, FH, Rationales, & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus d 23. decimi. quia Rationale HI, applicatum est ad Rationalem HK,



(est enim



(a est enim recta HK, Rationali EF, æqualis) erit recta HG, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine incommensurabilis, vt est ostensum; c erit & HG, eidem FH, longitudine incommensurabilis. Est autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum sub FH, HG, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. d Igitur quadratum ex FH, incommensurabile est rectangulo sub FH, HG. Sed quadrato ex FH, commensurabile est quadratũ ex HG, (quod sint ambo ex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) e atque adeo & duo quadrata ex FH, HG, simul, quadrato ex FH, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub FH, HG, commensurabile est id, quod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex FH, HG, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub FH, HG, bis f Quare & compositum ex quadratis rectarum FH, HG, & ex rectangulo bis sub FH, HG, incommensurabile est cõposito ex quadratis rectarum FH, HG, g At quadratis ex FH, HG, vna cum rectãgulo bis sub FH, HG, æquale est quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommensurabile est cõposito ex quadratis rectarum FH, HG: Est autem compositũ hoc Rationale, ex lẽmate 4. propos. 19. huius lib. quod ostẽsum sit commensurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex FG, h erit quadratum ex FG, Irrationale i, ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est absurdum, ostensa enim est FG, Rationalis longitudine ipsi EF, incõmensurabilis. Nõ ergo DB, quo Medium AB, superat Medium AC, Rationale est. Quã ob rẽ Medium non superat Medium, Rationali. Quod erat ostendendum.

a 34. pri
b 21. decimi.
c 14. decimi
d 10. decimi.
e 16. decimi.
f 17. decimi
g 4. sec.
h 10. defin.
i 11. defin

SCHOLIVM:

EX dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, superet Rationale AC, spatio DB. Dico DB, quoque esse Rationale.



Quoniam enim AB, AC, Rationalia sunt; a erunt AB, AC, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ; b atque adeo & inter se commensurabilia. Quare cum totum AB, compositū ex AC, DB, commensurabile sit ipsi AC, erit quoque idem AB, reliquo DB, commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.

a 9. definitione. b 12. decimi.

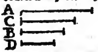
PROBL. 4. PROPOS. 28.

xxvij. o.

MEDIAS inuenire potētia tantū cōmensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commensurabiles, c inter quas media proportionalis sumatur C, d fiatq; vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, esse Medias potētia tantū commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

c 13. sex. d 12. sex.



Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantum commensurabiles; e erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo f cum ipsum possit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D, suntque A, B, potentia tantū commensurabiles; erunt quoque C, D, solum commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. g Est ergo & D, Mediæ C, commensurabilis Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D potentia tantū commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D, & permutando vt A, ad C, ita B, ad D. Vt autē A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D, ideoque B, media pro-

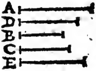
e 22. decimi. f 17. sex. g 24. decimi.

portionalis inter C,& D, a poterit rectangulum ſub ipſis C,D,comprehenſum.Eſt autem quadratum ex B, linea Rationali,Rationale.Igitur & rectãgulum ſub C, D, Rationale eſt. Medias ergo inuenimus C,D,potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat. [a]17.ſex

PROBL. 5. PROPOS. 29. xxviij. o.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles,quæ Medium contineãt.

EXPONANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib.demonſtrauimus, tres Rationales A, B,C, potentia tantum commenſurabiles, [b] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [b]13.ſex
[c] Deinde fiat vt B,ad,C, ita D, ad E. Dico D,E, Medias eſſe potentia tantum commenſurabiles,quæ Medium contineãt.Quoniã enim AB,Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: erit rectangulum ſub A, B, [c]12.ſex



atque adeo & quadratũ ex D,[d] quod illi æquale eſt,[e] Irrationale, quod Medium dicitur;& ipſa recta D, Media. Et quia eſt vt B,ad C, ita D,ad E, ſunt autem B, C, Rationales,& potentia ſolum commenſurabiles;erunt quoque D,E,potentia ſolum commenſurabiles,vt in ſcholio propoſ.10. huius lib. demonſtratum eſt. Cum ergo D,Media ſit,[f] erit & E, illi potentia ſolum commenſurabilis,Media;Ac propterea D, E, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles.Dico iam ipſas continere Mediũ.Quoniam enim eſt vt B,ad C,ita D,ad E;& permutãdo vt B,ad D, ita C,ad E: Vt autem B,ad D,ita D, ad A; erit quoque vt D,ad A, ita C, ad E. [g] Rectangulum igitur ſub DE,æquale eſt ei, quod ſub A,C:Eſt autem quod ſub A,C,Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus [h] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum ſub D,E,Medium eſt. Medias ergo inuenimus D, E, po-

[d]17.ſex [e]22.dec [f]24.dec [g]16.ſex [h]22.dec

tentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM. I.

IN ijs quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos similes inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A,B,C,D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D, Multiplicantes autem se mutuo A, & B. faciant E; Item C, & D, se multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quando quidem latera habẽt proportionalia, vt ex constructione est manifestum.

A, 6.	C, 12.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F 96.

a28. & 29. noni *QVONIAM autem in lib. 9. a ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerũ parem; Imparem vero, si impar multiplicet imparẽ, perspicuum est, quonã modo inueniri possint duo plani similes, quorũ vterq; par sit, vel impar; Vel vnus quidẽ par, alter vero impar. Si enim latera sumpta sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, si autem numeri sint impares, erunt & plani eorũ impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horum vero par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat vnum latus numerum parẽ, alterum vero imparem, &c.*

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, dũo plani similes AB, *&* C, *quorum vterque vel par sit, vel impar.* b24. & 26. noni *b Et quoniã, siue a pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par ẽ; detracto* BD, *ex* AB, *qui æqualis*

ſit ipſi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiſo bifariã in E; Dico numerum factum ex AB, in BD, [a] *qui quidẽ quadratus eſt, compoſitum cum quadrato numeri ED, facere quadratum. Quoniam enim numerus AD, bifariam eſt diuiſus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cũ quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nẽpe qui fit ex AB, in BD, & quadratus numeri DE, compoſiti faciunt quadratũ, eum videlicet, qui ex BE, gignitur. quod eſt propoſitum.* a 1. noni

A ..... E ..... D .... B
C ....

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, quando AB, & C, ſimiles ſunt, inuentos eſſe eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum exceſſus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus ſit.

QVOD ſi numeri ſumantur AB, & C, non ſimiles, vterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorũ BE, ED, quorum exceſſus, numerus ſcilicet, qui fit ex AB, in BD, nõ eſt quadratus. Si enim quadratus eſſet, b numeri AB, BD, hoc eſt, AB, & C, plani ſimiles eſſent. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles. b 2. noni

SCHOLIVM II.

ITAQVE ſi iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum exceſſus etiam ſit numerus quadratus; ſumemus vt prius, duos planos ſimiles, quorum vterque par, vel impar ſit, nẽpe AB, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate eſt dictum. Nam quadrati numeri ex BE, ED, deſcripti ſunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex BE, quadratum ex ED, numero, qui producitur ex AB, in BD, qui etiam quadratus eſt.

A ..... E ..... D .... B
C ....

SI vero inueniendi sunt duo quadrati, quorum exceſſus non ſit quadratus: ſumendi erunt duo numeri plani AB, & C, non ſimiles, quorum vterque par ſit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nam ſimiliter oſtẽdemus quadratum ex BE, æqualem eſſe quadrato ex DE, vna cum eo, qui ex AB, in BD, fit; Quare exceſſus quadratorum ex BE, ED, eſt numerus factus ex AB, in BD, qui cum non ſit quadratus; (Si enim eſſet quadratus, eſſent AB, BD, plani ſimiles, quod non ponitur) conſtat propoſitum.

A . . . E . . . D . . . . B

C . . . .

HOC poſterius facilius abſoluemus, ſi quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter ſit quadratus, alter vero non. Vt ſi quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato Sic quoque ſi idem quadratus 36 diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. ſuperabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & ſic de cæteris.

LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.

SINT duo numeri plani ſimiles AB, & C,

A . H . I . E . F . G . . . D . . . . B

C . . . .

pares, vel impares, vt in lemmate præcedẽti, fiatque eadem conſtructio, ita vt rurſus quadratus, qui fit ex multiplicatione ſimilium numerorum AB, DB, inter ſe, vna cum quadrato ex DE, æqualis ſit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE, vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus ſit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF,

n se fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex BF, vel aequalis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex BF; ac propterea latus ipsius maius latere BF. Erit ergo latus ipsius vel aequale numero B E, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros BE, BF, sola unitate inter se distantes nullus medius est nu-

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . B

C . . . .

merus, ne vnitas ipsa secetur; Esset autem dictum latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam BF, minus vero quam BE.) Si dicatur aequale, ita vt quadrato ex BE, aequalis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex AB, in BD, & ex quadrato numeri DF; cum eidem quadrato ex BE, sit ostensus in praecedenti lemmate aequalis numerus, qui fit ex A B, in BD, vna cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, aequalis ei, qui fit ex AB, in B D, vna cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, eo scilicet, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex DF, aequalis reliquo quadrato ex D E; Ideoque & latus D F, lateri D E, aequale, pars toti. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit, aequale est numero BE. Sed neq; maius. Sit. n. si fieri po-

test, latus illius æquale numero BI, qui maior sit, quã BE, ita vt quadrato ex BI, æqualis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiore, maior est quadrato ex BE, latere minore: erit quoque cõpositus ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit, (cum hic compositus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex BE. Est autem quadrato ex BE, ostensus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE: Ablato ergo communi, qui fit ex AB, in BD; erit reliquus quadratus ex DF, reliquo quadrato ex DE, maior; ac proinde latus DF latere DE, maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter fit ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se, maius est latere BE. Sed neque æquale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus maior est quadrato ex BF.

A .. H .. I . E . F . G ... D........B
C. . . . .

SIT iam, si fieri põt, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus AH, duplus vnitatis E F. Quia igitur totus AD, totius ED, duplus est, (diuisus enim est AD, in E, bifariã) & ablatus AH, ablatæ vnitatis EF; erit & reliquus HD, reliqui FD, duplus, ex ijs, quæ ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco HD, in F, bifariam diuiditur. Qua-

re ex 6. theorem. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus, qui fit ex HB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis eſt ei, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF: et detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cũ HB, AB, multiplicantes eundem BD, producant æquales numeros; a habeant autem multiplicantes eãdem proportionem, quã producti; erit HB, ipſi AB, æqualis, pars toti, Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis. a 18. ſep.

SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex AB, in BD, vna cũ quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quod ſit BG, ita vt qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis ſit quadrato ex BG. Sumatur autem ipſius EG, duplus AI. Quoniam igitur totus AD, totius ED, duplus eſt, & ablatus AI, ablati EG; erit rurſus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus, qui fit ex IB, in BD, vna cum quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: Ponitur autẽ eidem quadrato ex BG, æqua-

A .. H .. I. E. F . G .. D .... B

C ....

lis,qui fit ex AB ; in BD ,vna cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex IB, in B D,vna cum quadrato ex DG , æqualis est ei , qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF . Ablatis igitur quadratis ex DG , & DF , quorum qui ex DG, minor est,remanebit qui ex IB, in BD,maior eo , qui ex AB,in BD,pars toto. Quod est absurdum. Nõ est ergo qui ex AB,in BD,vna cum quadrato ex DF,minor quadrato ex BF. Sed neque maior est ostensus ; neque æqualis. Non igitur quadratus est,qui ex AB,in BD,vna cum quadrato ex DF. Quod est propositum.

SCHOLIVM III.

EX hoc facile inueniemus duos numeros,ita vt ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat,quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati , ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus ; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem,quam quadratus ad quadratum.

IDEM obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus . Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum , in quos diuisus est , proportionem habebit,quam quadratus ad quadratum.

xxix.
xvij.

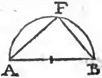
PROBL. 6. PROPOS. 30.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabils , ita vt maior,quam minor,plus posſit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

EXPONATVR linea Rationalis A B , & inue-

niantur

niantur ex ijs, quæ in ſcholio 2. propoſ. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati C D, C E, quorum exceſſus DE, non ſit quadratus. Deinde per coroll. propoſ. 6. huius lib. fiat vt C D, numerus ad numerum D E, ita quadratum, ex A B, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex A F, accommodeturque A F, in ſemicirculo A B F, circa diametrum A B, deſcripto: ac denique connectatur recta F B. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus eſt in ſemicirculo; [b] erit quadratum ex A B, æquale duobus quadratis ex A F, & FB; hoc eſt, recta AB, plus poterit quam AF, quadrato rectæ F B. Et quia eſt quadratum ex A B, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE, [c] erunt quadrata ex AB, AF; commenſurabilia; atque adeo cum quadratum ex A B, ſit Rationale, nempe ex linea Rationali A B; deſcriptum; erit & quadratum ex A F, Rationale, proptereaque & recta AF, ipſum deſcribens, Rationalis. Rationales ergo ſunt AB, AF, atque adeo commenſurabiles ſaltem potentia. Quia vero quadratum ex A B, ad quadratũ ex AF, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque quadratus numerus CD, ad non quadratum DE, proportionem habeat, quã quadratus ad quadratũ; alias & DE, quadratus eſſet, [d] vt in Arithmeticis eſt demoſtratum. quod non ponitur) [e] erunt rectæ AB, AF, longitudine incõmenſurabiles: Sunt autẽ cõmenſurabiles potentia, vt oſtenſum eſt. Igitur AB, AF, Rõnales ſunt potentia tantũ cõmenſurabiles.



[a] 31. ter
[b] 47. pri
[c] 6. deci.
[d] 74. oct.
[e] 9. deci.

IAM vero, quoniam eſt vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AF; erit per conuerſionẽ rationis, vt quadratus numerus CD, ad quadratũ numerũ CE, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B. (ſicut enim CD, ſuperat DE, quadrato C E, ita etiam quadratum ex AB, ſuperat quadratum ex AF, quadrato ex FB,) [f] Quare rectæ AB, FB, longitudine commenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior A B, plus poſſit, quam minor

[f] 9. deci.

AF

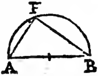
AF, quadrato lineæ F B, sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

xxx. xviij.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea AB, inueniantur-que per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati CE, ED, ita vt ex illis compositus C D, non sit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus C D, secetur in duos numeros non quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD, ad neutrum ipsorum CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, alias secundum priorem modum, esset totus C D, etiam quadratus: iuxta posteriorem vero, quilibet ipsorum C E, ED, quadratus quoque, [a] vt in Arithmeticis ostensum est. quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex A F; accomodeturque A F, in semicirculo, AFB, circa A B, descripto. Denique connectatur recta F B. Poterit igitur, vt in præcedenti, A B, plus quam AF, quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia solum commensurabiles: Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti propos. Quoniã vero rursus, vt prius, est per conuersionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex F B; Non habet autem CD, ad C E, proportionem, quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum



C, 144. E, 16. D   C, 160. D.
C . . . . . . E . . . D

a 24. oct.

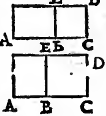
ex

ex *AB*, ad quadratum ex F B, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. [a] Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales *AB*, AF, potentia tantum commensurabiles, ita vt maior *AB*, plus posſit quam minor A F, quadrato lineæ FB, ſibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum. [a] 9. dec.

LEMMA.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectũ conſtitutæ, quarum A B, maior ſit. Dico eſſe, vt AB, ad BC, ita rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex B C. Deſcribatur enim ex B C, quadratum B D, compleaturque rectangulũ AD; eritq; rectangulum AE, ſub AB, BC, *contentum; quod BE, ipſi* BC, *ſit æqualis:* [b] *perſpicuum autem eſt, eſſe vt A* B, *ad* BC, *ita AE, ad* BD. [b] 1. ſexti

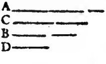


*EODEM modo erit, vt minor ad maiorẽ, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratũ maioris, vt in ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua A*B, *minor eſt, quam* BC.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. xxxi. xxiiii. xxv.

a 30.dec a REPERTAE sint duæ Rationales A,B, potentia tantum commensurabiles:ita vt A, maior plus possit quã B, minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitque C, media proportionalis inter A,& B; & fiat vt A,ad B,ita C,ad D. Quoniam igitur A,B,sunt Rationa-



b 22.decimi. les potentia solum commensurabiles; b erit rectangulum sub A,B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A,& B,potentia tantum cõmensurabiles;erũt quoque C,& D, potentia solum commensurabiles, vt in
c 24.decimi. scholio propos. 10. huius libri ostendimus. c Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C,D, potentia tantum commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim sit vt A,ad B,ita C,ad D;& permutando vt A,ad C, ita B,ad D;sit autem vt A,ad C,ita C,ad B,erit quoque vt C,
d 17.sex. ad B,ita B,ad D;d Ac propterea rectangulum sub C,& D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale sit;erit & rectangulũ sub C, D, illi ęquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles, Rationale. Quoniam vero est vt A,adB,ita C,ad D: potest autem A, plus quam B,quadrato lineæ longitudine sibi commensurabi-
e 15.dec lis,ex constructione; e poterit quoque C, plus quam D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis,Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles,quæ Rationale continent,ita vt maior C, plus possit quam minor D,quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

QVOD si repertæ sint A ,B , Rationales potentia tantum commensurabiles , ita vt A , plus possit quam B. quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant,vt prius , ostendemus eodem modo , inuentas esse duas Medias C , D, potentia tantum commensurabiles, quę Rationale contineant,ita vt maior C, plus possit quam minor D,quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

SCHO-

SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facile indicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, Medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineãt, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

LEMMA.

SI sint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secũda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum cõstitutæ. Dico esse vt AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub BC, CD. Describatur enim ex BC, quadratum BCDE, perficiaturq; rectangulum AF; Eritq; AE, contentũ sub AB, BC; & CF, sub BC, CD; quod BE, CD, ipsi BC, æquales sint. [a] *Perspicuum autem est esse AB, ad CD, vt AE, ad CF. Quod est propositum.* a. 1. sex.

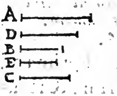


PROBL. 9. PROPOS. 33. xxxij. xxvj.

INVENIRE duas Medias potentia solum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tan-

tum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam C, qua-
a 30.dec drato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. a Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commensurabilibus, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia solum commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos.



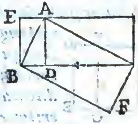
b 13.sex 21. huius lib. demonstrauimus.) b Et ipsarum A, B, sumatur media proportio-
c 12.sex nalis D; c fiatque vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniã igitur ex lemmate antecedenti, est vt A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: d Est
d 17.sex
e 16.sex autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D, e & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quod proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos. 19 huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solum commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solum commensurabiles sunt, vt in scholio propos. 10. huius lib. osten-
f 22.dec dimus. f Quia vero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis
g 24.decimi. est, & Media; g erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectan-
h 22.decimi. gulo sub B, C, h quod Medium est, (quod B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles,) æquale esse rectãgulum sub D, E; erit rectangulum sub D, E, Medium Denique quia ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitu-
i 15.dec dine commensurabilis, ex constructione; i poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solum commensurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ rectæ lõgitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciẽdũ.

QVOD si repertæ fuerint A,B,C,Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt A,plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis,reliqua autem construatur,vt prius, demonstrabimus similiter,inuentas esse duas Medias D,E,potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus possit quam minor E,quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile apparere potest ex adducta demonstratione.

LEMMA I.

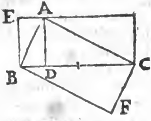
SIT triangulum rectangulum ABC,angulum rectum habens BAC,à quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulũ contentum sub CB,BD,æquale esse quadrato ex AB:contentum autem sub BC,CD,æquale quadrato ex A C: & contentum sub BD,DC,æquale quadrato ex AD:contentũ denique sub BC, AD, æquale contento sub AB, AC.

QVONIAM ex coroll.propos. 8. lib.6.recta AB,media proportionalis est inter CD,BD; [a] *erit* [a 17.sex] *rectangulum sub CB, BD, quadrato ex AB, æquale.*



EADEM ratione erit rectangulum sub BC, CD, *æquale quadrato ex AC; quoniam per idem coroll. AC,media proportionalis est inter* BC,CD.

RVRSVS quia ex eodem coroll. A D, inter



BD, DC, media est proportionalis, erit eodem modo rectangulum sub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

a 8. sexti POSTREMO, [a] quia triangula ABC, ABD, similia sunt; erit vt BC, ad AC, ita AB, ad AD. b 16. sexti. [b] Quare rectangulum sub BC, AD, æquale est rectangulo sub AB, AC. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulum CE, contentũ sub BC, AD: Item rectangulum AF, sub AB, AC, contentum. c 41. primi. [c] Quoniam igitur rectangulum CE, duplum est trianguli ABC, necnon & rectangulum AF, eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se æqualia rectangula CE, AF. quod est propositum.

LEMMA II.

SI recta linea secetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorẽ, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulũ sub tota & minore parte cõtentũ.

SECETVR recta AB, non bifariam in C, sitque maior pars AC. Dico esse vt AC, ad CB, ita rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub AB, CB. Describatur. n. ipsius AB, quadratũ ABDE, ducaturq; CF, ipsi AE, parallela: eritq; AF, contentũ sub AB, AC, et CD, contentum sub AB, CB; quod AE, CF, ipsi AB, æquales sint. d 1. sex. [d] Qm̃ igitur est vt



AC, ad CB, ita AF, ad CD; constat propositum.

EADEM ratione erit, vt minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum sub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum sub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor aūt secetur bifariã; erit rectangulũ sub ipsis contentũ duplũ rectãguli, quod sub maiori linea, & dimidia parte minoris cõtinetur.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, angulũ rectũ constituentes ABC, seceturq; minor BC, bifariam in D. Dico rectangulũ sub AB, BC, duplũ esse rectanguli sub AB, BD. Compleatur enim rectãgulum AC, sub AB, BC; ducaturque DE, ipsi AB, parallela, eritque BE, contentũ sub AB, & BD. dimidia minoris.[a] *Quoniam igitur AC, ipsius BE, duplum est, quod & basis BC, dupla sit basis BD, constat propositum.* [a] 1. sexti



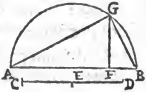
EODEM modo, si BC, secta bifariam, sit maior, erit quod sub AB, BC, continetur, duplum eius, quod continetur sub AB, minore & BD, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

PROBL. 10. PROPOS. 34. xxxiij. xxvij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis,

Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.

a31.def. a REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD. potentia solum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit quam minor CD, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; seceturque CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE, hoc est quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud quod sub AF, FB, continetur. Postremo descripto semicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturque rectæ AG, GB. Quoniã igitur AB, plus potest, quam CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque



est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartæ parti
b19.dec. quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; [b] erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB; Rectangulum vero sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lem
c31. ter. ma 1. eiusdem antecedentis propositionis; [c] quod angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB, ac propterea cum AF, FB, longitudine sint incõ-
d10.dec. mensurabiles; [d] erunt quadrata ex AG, GB, incommensu-
e4.defin rabilia. [e] Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensura-
f47.primi. biles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, [f] æqualeque quadratis ex AG, GB; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factũ, [g] æquale est quadrato ex FG,
g17.sex. (propterea quod angulus AGB, rectus est & FG, ad AB,

perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla existens ipsius CE, dupla etiam erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG. (cum FG, dimidia sit minoris CD,) a Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cum sit eius dimidium, Mediū est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentum igitur sub AG, GB, Medium quoque est: Ostensum autem est, compositum ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

a 22. dec.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatiū Rationale, hac fere ratione.

EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatque vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, pependicularis. Quoniam igitur est vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE: Non habet autem C, ad D, proportionem quam quadratus ad quadratum; b erunt latera AB, AE, dictorum quadratorum proportionē non habentiū, quā quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cum AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. c Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur

F



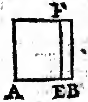
A EB

C, 6. D, 4.

b 9. dec.

c 1. sex.

a10.decimi. *cum AB, AE, incommensurabiles sint longitudine, a erũt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale, Eodemque argumento ostendemus BF, Irrationale esse. Quia vero AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuũ est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.*



C, 6. D, 4.

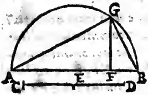
AT vero si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totũ AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim vtrũque AF, FB, Rationale sit: erunt ipsa inter se commensurabilia.b Igitur & totũ AFB, ex ipsis compositũ vtriq; eorum
b16.decimi. c9.defin. *cõmensurabile erit. Quare AFB, totũ commẽsurabile vtriq; Rationali AF, FB, c Rõnale quoque est. Quod est propositũ.*

xxxiv. xxviij.
PROBL. 11. PROPOS 35.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant cõpositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

d32.decimi. d REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quam minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantq. reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, e æquale existens quadratis rectarum AG, GB, Medium est, erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in

e47. primi.



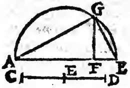
ante-

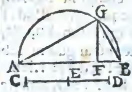
antecedẽti propositione,ostẽdemus rectangulũ sub AB, CD,duplũ esse rectãguli sub AB,FG;atque adeo illud esse huic cõmẽsurabile.Quare cum rectãgulũ sub AB,CD, Rationale sit,ex constructione; erit & rectangulum sub AB,FG,illi commensurabile,Rationale: Sed per 1.lemma propos 33.huius lib.rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG,GB.Igitur & rectangulum sub AG,GB,Rationale est. Ostensum autem est,compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium.Igitur duæ rectæ AG,GB,quæ ostẽsæ sunt potentia incommensurabiles,faciunt compositum ex earum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdẽ comprehensum,Rationale.Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG,GB,potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum vero sub ipsis contentum,Rationale. Quod erat faciendum.

PROBL. 12. PROPOS. 36. xxxv. xxix.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Mediũ, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

a REPERIANTVR duę *Mediæ* AB,CD, potentia tantum commensurabiles, quæ *Medium* contineant, ita vt maior A B, plus possit quam minor C D,quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiãtque reliqua,vt in propos.34.Ostendemus igitur similiter, rectas A G, G B, potentia incommensurabiles esse. Et quia quadratum ex Media A B, Medium est, b.& quadratis rectarum AG,GB, æquale;erit & compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus,vt in 34.demonstrabimus, rectan- a 33.dec b 47.primi.





gulum sub AB, C D, duplum esse rectanguli sub AB,FG;atque adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum ex constructione, rectangulum sub AB, CD, Medium fit: erit quoque rectangulum sub A B, F G, hoc est, sub A G, G B, quod illi per 1. lemma propos. 33. huius lib. æquale est, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniam vero A B, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi CD: Est autem eidem CD, ipsa CE, longitudine commensurabilis; quod illa huius sit dupla; a erunt AB, CE, longitudine incommensurabiles. Sed vt A B, ad CE, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, C E, hoc est, ad rectangulum sub AB,FG; hoc est, sub A G, GB. (sunt enim rectangulum sub AB,FG, & sub AG,GB, per 1. lemma propos. 33. huius lib. æqualia.) b Igitur quadratum ex AB, incommensurabile est rectangulo sub A G, G B. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ AG,GB, potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

a 13. dec
b 10. dec

SCHOLIVM.

EX hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad propos. 24. huius lib. nos demonstraturos recepimus. nimirum:

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum AG,GB, quam rectangulum sub ipsis, esse Mediũ, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ, incommensurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum AG,GB, & rectangulũ sub AG,GB, commensurabilia. quod

non

non ponitur. Quocirca si sumatur AB, potens compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum sub AG, GB, id est, media proportionalis inter AG, GB, inuenta erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

PRINCIPIVM SENARIORVM per compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. xxxvj. xxx.

SI duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales AB, BC, potentia solum commensurabiles, inuentę per 2. lemma propos. 21. huius lib. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam enim AB, longitudine incommensurabilis est ipsi BC: & vt AB, ad BC, ita est rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, per lemma propos. 31. huius lib. a erit rectangulum sub AB, BC, quadrato ex BC, incommensurabile. Sed rectangulo sub AB, BC, commensurabile est eius duplum, nempe quod bis sub AB, BC, continetur; & quadrato ex BC, cõmensurabile est quadratum rectę AB; (omnia enim sunt Rationalia) b atque adeo & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, eidẽ quadrato ex BC, commensurabile est. Igitur per ea, quę in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & quod bis sub AB, BC, continetur, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Quamobrem & composito ex eo, quod bis sub AB, BC, & ex cõposito quadratorũ rectarum AB, BC, hoc est, quadratum ex tota AC, (c Est enim hoc quadratum æquale quadratis rectarũ AB, BC, vna cum rectãgulo sub AB, BC, bis) composito ex quadratis rectarum AB, BC, d incommensurabile erit: Est autẽ cõpositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale, quod

a 10. dec. b 16. dec. c 4. sec. d 17. dec.

commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex
c 10.def BC,Rationali.Igitur quadratum ex AC,quadrato Rationali ex BC,incommenſurabile,[a] Irrationale eſt; atque adeo & recta ipſa A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus,ſeu vt alii loquuntur,Binomiũ, quia ex duobus nominibus,nempe ex duabus Rationalibus lineis AB,BC,potentia ſolum commenſurabilibus componitur.Si duæ igitur Rationales potentia tantum commẽſurabiles componantur,tota Irrationalis erit, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam
b 22.decimi. *recta quæ inter eas eſt medio loco proportionalis,*[b] *Irrationalis eſt,quæ Media vocatur.At vero compoſita ex ipſis,*[c] *Irrationalis eſt,quæ ex binis nominibus dicitur.*

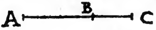
37.decimi.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

xxxvij. xxxj.

SI duæ Mediæ potentia tantum commẽſurabiles componantur,quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autẽ ex binis Mediis prima.

d 28.decimi. COMPONANTVR duæ Mediæ [d] ſuperius inuentæ AB,BC, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam A C, Irrationalem eſſe.



Quia enim AB,eſt ad BC, vt rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex B C, vt in lemmate propoſ.31.huius lib.eſt oſtenſum;ſunt autem AB,BC, longitudine
e 10.dec incommenſurabiles; [e] erunt rectangulum ſub AB,BC,& quadratum ex B C, incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt, quod ſub AB,BC,bis;& quadrato ex BC,commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC. (Nam cum A B B C, potentia ſint commenſurabiles,erunt ipſarum quadrata commenſurabilia, [f] atque adeo & compoſitum ex
f 16.dec

ipſa-

ipsarum quadratis quadrato ex B C, commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB,BC, bis,& compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabilia inter se sunt,per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum AB,BC, vna cum rectangulo bis sub A B, B C, hoc est,quadratum ex A C, a quod huic composito æquale est, b incommensurabile quoque est rectangulo sub A B, BC,bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB,BC,commensurabile rectangulum semel sub A B, BC,cum hoc sit illius dimidium.c Igitur quadratum ex A C, incommensurabile est rectangulo sub AB,BC:Ponitur autem rectangulum sub AB,BC,Rationale.d Irrationale ergo est quadratum ex AC, e & ob id recta quoque A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel vt alii loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, &c. quod erat ostendendum.

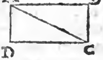
a 4. sec.
b 17. dec
c 13. dec
d 10. def
e 11. def

LEMMA.

QVOD sub linea Rationali,& Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATVR rectangulũ ABCD,sub Rationali AB,& Irrationali BC. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, f faciet ipsum ad Rationalem AB,applicatum latitudinẽ BC,Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim B C, Irrationalis. Non ergo AC,Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.

f 21. dec



THEOR. 27. PROPOS. 39.

xxxviij
xxxii.

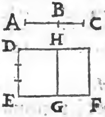
SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur,quæ Medium con-

tineant

tineant;tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs ſecunda.

a 29. decimi. COMPONANTVR duæ Mediæ [a] ſuperius inuentæ AB,BC,potentia tantum cõmenſurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis DE,[b] ad quam applicetur rectangulum DF,æquale quadrato A C; & compoſito ex quadratis rectarum AB,BC,æquale alterum ad eandem DE,applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc eſt, rectangulum DF,[c] æquale eſt duobus quadratis ex AB,BC,vna cum rectangulo bis ſub AB,BC;erit reliquum HF æquale reliquo rectangulo,quod bis ſub AB, BC, continetur.

b 45. primi. c 4. ſecũ.



Quoniam vero, ex hypotheſi, rectangulum ſub AB,BC,Medium eſt;erit & rectangulum bis ſub AB, BC, ei commenſurabile, hoc eſt,HF,Medium, ex coroll.propoſ.24.huius lib. Rurſus qa quadrata Mediarum AB, BC,potentia commenſurabilium,commenſurabilia ſunt;[d] erit & compoſitum ex ipſis, nimirum rectangulum DG,vtriuis ipſorum commenſurabile:Sed vtrumque quadratorum ex Medijs AB,BC,Medium eſt. Igitur & DG, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium erit.Quia igitur Media DG,HF, applicantur ad Rationalem DE;([e] eſt enim GH,Rationali DE,æqualis) [f] erunt eorum latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia AB, BC, longitudine incõmenſurabiles ſunt; & eſt vt AB, ad BC, ita quadratum ex AB,ad rectangulum ſub AB, BC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB, BC, ex lemmate 3.propoſ.19.huius lib.erit quadratum ex AB,incõmenſurabile rectãgulo ſub AB,BC, vt in ſcholio propoſ. 10.huius lib.oſtenſum eſt; Atqui quadrato ex AB, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC;& rectangulo ſub AB,BC, commenſurabile eſt,quod continetur bis ſub A B, BC, cum hoc illius ſit duplum.Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius

d 16. dec. e 34. pri f 23. demi.

ius

ius lib.diximus,erit & cõpoſitum ex quadratis rectarum AB,BC,hoc eſt,rectangulum DG, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB,BC,hoc eſt,rectangulo HF.[a] Cum ergo ſit vt DG,ad HF,ita EG, ad GF; [b] erit EG,ipſi GF, longitudine incommenſurabilis. Oſtenſum autem iam fuit EG,GF,eſſe Rationales. Rationales igitur ſunt EG, GF,potentia tantum commenſurabiles, [c] ac propterea & tota EF,compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antecedens,DF,contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF,Irrationale eſt; Ac propterea & quadratum ex AC,ipſi DF, æquale,Irrationale eſt. Quare & recta AC,Irrationalis eſt. Vocetur autem ex binis Medijs ſecunda,ſeu vt alijs placet,Bimediale ſecundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commenſurabiles,&c. Quod erat demonſtrandum.

a 21. ſexti.
b 10. decimi.
c 37. decimi.

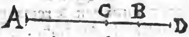
SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propoſitione lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commenſurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primam: Hic vero lineam Irrationalem AC,quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantũ cõmenſurabilibus,quæ Medium contineãt, ex binis Medijs ſecundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius eſt Medio,quod Irrationale eſt,ex propoſ.22.huius lib.

LEMMA

SI recta linea non bifariam ſecetur,erit compoſitum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum ſub partibus bis comprehenſum,quadrato eius lineę,qua maior pars minorem ſuperat.

SECETVR recta AD, in B,*non bifariam, ſitque maior pars AB; in qua ſumatur* BC,*minori* B D,*æqualis,vt ſit AC,exceſſus,*





quo AB, superat BD, hoc est, BC, ipsi BD, æqualem. Dico quadrata rectarũ AB, BD, simul maiora esse rectãgulo bis sub AB, BD, quadrato rectæ AC. Quoniã.n. quadrata ex AB,

27.secũ. BC, a æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC. vna cũ quadrato ex AC, estq; BC, ipsi BD, æqualis: erunt quoque quadrata ex AB, BD, æqualia rectangulo bis sub AB, BD, vna cũ quadrato ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora sunt, quam rectangulum bis sub AB, BD, quadrato rectæ AC. quod est propositum.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

xxxix. xxxiij.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duæ rectæ lineæ potentia incõmensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ b superius inuentæ

b34.dec. AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Dico totam AC, esse Irrationalem. Quoniam.n. rectangulum sub AB, BC, Medium ponitur, erit & rectangulum bis sub AB, BC, illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. atque adeo Irrationale. Ponitur autem compositũ ex

quadra-

quadratis rectarum AB, BC, Rationale.[a] Incommensurabile ergo est rectangulum bis sub A B, BC, composito ex quadratis rectarum A B, BC.[b] Igitur & rectangulum bis sub AB,BC, vna cum quadratis ex AB,BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB,BC. Cum ergo hoc compositum ponatur Rationale;[c] erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale;[d] Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia[e] cum possit duo quadrata ex AB,BC; & rectangulum bis sub AB,BC; compositum ex quadratis rectarum AB,BC, per lemma antecedens, maius est rectangulo bis sub A B, B C. Quare cum compositum ex quadratis rectarum AB,BC, Rationale sit, rectangulum vero bis sub AB,BC, Medium; recte vocabitur AC, Maior, siquidem à Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incómensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 10.def
[b] 17.dec
[c] 10.def
[d] 11.def
[e] 4.sec.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

xxxx.
xxxiiij.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectæ[f] superius inuentæ AB,BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium, rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam

[f] 35.dec



AC, Irrationalem esse. Quoniã enim compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Medium est; quod vero continetur bis sub A B. BC, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub AB, BC, semel cõtinetur, Rationale ponatur; [a] erit compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC. [b] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectãgulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est rectãgulo bis sub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB. BC, vt diximus, sit Rationale; [c] erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; [d] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potẽs, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

a 10. def. *b 17. dec* *c 10. def.* *d 11. def.*

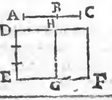
xxxxj. xxxv.

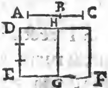
THEOR. 30. PROPOS. 42.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Mediũ, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

e 36. decimi.

COMPONANTVR duæ rectæ [e] superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectãgulum sub eisdem Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurabileq;





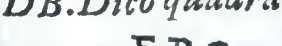
compoſito ex quadratis ipſarum. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis DE,[a] ad quam applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A C; Et cõpoſito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc eſt, rectangulum DF, [b] æquale eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis ſub A B, B C. Quoniam vero tam compoſitum ex quadratis rectarum A B, BC, hoc eſt, rectangulum D G, quam rectangulum ſub AB, BC, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis ſub AB, BC, nẽpe ipſum HF, (cũ illi ſit commenſurabile) Mediũ ponitur, [c] facient D H, H F, ad Rationalem DE, applicata latitudines E G, G F, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, id eſt, rectangulum DG, incommenſurabile ponitur rectangulo ſub AB, BC; Eidem autem rectangulo ſub A B, BC, commenſurabile eſt ipſius duplum, nempe quod bis continetur ſub AB, BC, hoc eſt, ipſum HF; [d] erunt & D G, H F, incommenſurabilia. Quare [e] cum ſit vt DG, ad H F, ita EG, ad GF; [f] erunt EG, GF, longitudine incommenſurabiles: Atqui EG, GF, oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; [g] Ac propterea tota EF, ex ipſis cõpoſita Irrationalis eſt. Quare DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Irrationale eſt. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale eſt; [h] ideoque & recta ipſa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compoſitum ex quadratis rectarum A B, BC, & rectangulum bis ſub A B, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Mediũ, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 45. pri.
[b] 4. ſec.
[c] 23. dec.
[d] 13. dec.
[e] 1. ſexti
[f] 10. dec.
[g] 37. decimi.
[h] 11. def.

L E M M A.

SI recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erũt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rursus inæqualiter in D, sintque priores partes AC, CB, magis inæquales, quã posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul.



Diuisa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC,
a 5. sec. *a æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratum ex EC, maius sit quadrato ex ED erit reliquum rectangulum sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniam vero quadrati*
b 4. sec. *ex AB, b æquale est tam rectangulo bis sub AC CB, vna cum quadratis ex AC, CB, quã rectangulo bis sub AD, DB, vna cũ quadratis ex AD*

DB;

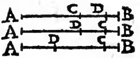
DB; erit rectangulum bis sub AC, CB, vna cũ quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis sub AD, DB; vna cum quadratis ex AD, DB. Quare cũ rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

SED cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quam partes AD, DB; erit AD, (quæ minor est posteriorum) maior quam CB; (quæ priorum minor est) ac proinde cum AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quã reliqua DE. Itaque quia rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, a æquale est quadrato ex EB: a 5. sec.
Item rectangulum sub AD, DB, vna cũ quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulũ sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

THEOR. 31. PROPOS. 43. xxxxij. xxxvj.

QVAE ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantum commensurabiles, vt vult propos. 37. huius libri.



Dico AB,ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantum commensurabiles. Si enim fieri potest,diuidatur iterũ in sua nomina ad D. Constat ergo AB,in C, non diuidi bifariã. Nã si bifariã diuideretur, essent AC,CB,lõgitudine cõmensurabiles. Quod est absurdum.ponuntur enim Rationales potentia tantũ commẽsurabiles.Eodem modo neque ad D,bifariã secabitur AB,cum & AD, DB, Rationales sint potentia tãtum commensurabiles.Secatur ergo AB,tam ad C,quã ad D,inæqualiter; ac propterea partes AC,CB, vel minus inæquales sunt,quã partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedẽs,quadrata ex AC,CB,vel minora sũt quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Neque enim partes AD, DB, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus AC, C B, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori,& minor minori.Nã hac ratione secaretur AB,secunda diuisione in eadem nomina,in quæ secta est diuisione prima.quod nou ponitur.) Quia vero si ab æqualibus inæqualia demantur,residuorum excessus excessui ablatorũ æqualis est,vt in pronunciato 16.lib.1,docuimus:Sunt autem quadrata ex A C, CB,vna cum rectangulo bis sub AC, CB, æqualia quadratis ex AD, DB, vna cum rectangulo bis sub A D,
a 4. sec. DB, a quod tam illa, quam hæc æqualia sint quadrato ex AB; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compositi ex quadratis rectarum AD, DB, idem sit reliqui rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale est. (Cum enim rectæ A C, CB, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in scholio propositionis 34, huius libri ostendimus:eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum AD, DB, Rationale. Qure cum

Ratio-

Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale est. [a] Quoniam vero rectangulum sub AC, CB, Medium est, erit & quod bis sub AC, CB, illi commensurabile, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub AD, DB, Medium erit. [b] Quare cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB. & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale. Often dimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Nō igitur AB, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctū diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

a 22. dec

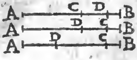
b 27. dec

THEOR. 32. PROPOS. 44.

xliij.
xxxvij.

QVAE ex binis Medijs prima, ad vnū duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propos. 38. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, existat, similiter probabimus, vt in præcedenti propositione, excessum rectāguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub, AD, DB, eundē esse, qui est cōpositi ex quadratis rectarū AC, CB, & cōpositi ex quadratis rectarū AD, DB: Sed excessus rectāguli bis sub AC, CB, & rectāguli bis sub AD, DB, spatiū est Rationale. (Cū enim AC, CB, ponātur continere Rationale, erit & quod bis sub AC, CB, ei,



quod cõtinetur semel sub AC, CB commensurabile, Rationale. Eodẽ que modo Rationale erit, quod bis sub AD, DB. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri ostẽdimus: perspicuum est, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatiũ esse Rationale.) Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & cõpositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale est. Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ sunt, & potẽtia cõmensurabiles, erunt earum quadrata Media quoque, & commensurabilia.ᵃ Quare & compositum ex ipsis vtriq; ipsorum commensurabile erit. Igitur cum vtrumq; sit Medium, erit & cõpositum ex ipsis, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium ostendemus cõpositum ex quadratis rectarum AD, DB, ᵇ Cum ergo Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale. Ostẽdimus autẽ & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur AB, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quã ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rẽ ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

a 16. dec

b 27. dec

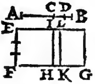
xxxxiv.
xxxviij.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

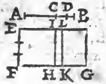
QVAE ex binis Medijs secunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs secunda AB, diuisa ad punctum C, in suã nomina, ita vt AC, CB, Mediæ sint potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propos. 39. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Medium. Diuidatur enim, si potest fieri, in alia

ıomina AD,DB,Igitur vbicunqne punctum D, existat, imiliter ostendemus,vt in propositione 43. quadrata ex \C,CB,maiora esse quadratis ex AD, DB, vel minora. :xponatur rationalis E F, a ad quam applicetur re- a 45.pri.
tangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH,æqua e quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æqua- e ei,quod continetur bis sub A C, CB, quandoquidem quadratum ex AB,b æquale est quadratis ex AC, CB, & b 4.sec.
ectangulo bis sub AC,CB.Eodem modo si ad EF,appli- :ur EK, quadratis ex AD, DB, æquale, erit reliquum L.G, æquale rectangulo bis sub AD,DB, comprehenso. Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia sunt quadratis ex AD, DB;erunt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia sunt,inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rursus quia quadrata ex AC, CB, maiora



sunt per lemma propos. 39.huius libri, rectangulo bis sub AC,CB; erit & EH, maius quam I G; ac propterea EH, maius quam dimidium ipsius EG, ideoque & recta FH,maior quam dimidium ipsius FH. Eadē ratione ostēdemus FK,maiorē esse dimidio ipsius FG.Inæquales ergo sunt partes FH.HG,partibus FK,KG,singulæ singulis. Quoniā vero AC,CB,Mediæ sunt,& potentia commēsurabiles;erunt & earum quadrata Media,& commēsurabilia. c Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commēsurabile erit.Cum ergo vtrumque ipsorum c16.dec.
sit Medium,erit quoque cōpositum ex ipsis, hoc est,EH, per coroll.propos. 24.huius libri,Medium.Eademque ratione Medium erit EK,d Quare EH, EK, ad Rationalem d23.dec
EF,applicata faciunt latitudines FH,FK,Rationales ipsi EF,longitudine incommensurabiles.Eodem modo cum rectangulum sub AC,CB ponatur Medium,erit & quod bis sub AC,CB,hoc est,IG,illi cōmensurabile,Medium, ex coroll.propos.24.huius lib.Quare cum applicetur ad Rationalē HI,e erit HG,Rationalis ipsi HI, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus L G,Me- e23.dec
dium esse, & KG, Rationalem ipsi KL;longitudine in-



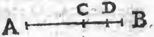
commensurabilem. Rursus quia AC,CB, longitudine, sunt incommensurabiles, & est vt AC, ad C B, ita per lemma 3, propos. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum sub AC,CB, a erit quadra-
a10.dec tum ex AC, rectangulo sub A C, C B, incommensurabile. Sed quadrato ex A C, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC,CB, (Cum .n. AC,CB, potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; b erit & compositum ex
b16.dec ipsis vtrilibet ipsorum, nimirum quadrato ex A C, commensurabile.) Rectangulo vero sub AC,CB, commensurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC,CB, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, per scholium propos. 14. huius libri,
c1 sexti rectangulo bis sub A G, CB, hoc est, ipsi IG. Quocirca c
d10.dec cum sit, vt EH, ad IG, ita FH, ad HG, d erunt FH, HG, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autẽ & Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum com-
e37.dec mensurabiles. e Igitur FG, tota Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum G. Eodem modo ostendemus & FG, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K.
f43.dec Quod fieri non potest, f vt demonstratum est in præcedentibus. Igitur AB, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendum.

xxxxv.
xxxix.

THEOR. 34. PROPOS 46.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita vt AC, CB, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis Medium, vt vult propos. 40. huius lib. Dico AB, non posse diuid

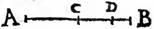


ad aliud punctum in alia nomina, quæ scilicet lineæ incõmensurabiles quoque sint potentia, facientes compositũ ex ipsarum quadratis Rationale, & rectangulum sub ipsis Medium. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicũque ergo punctum D, extiterit, demonstrabimus similiter, vt in propositione 43. excessum compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, eum esse, qui rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatiũ est Rationale: (quia cum vtrũq. cõpositũ ex hypothesi sit Rationale, erit quoq. eorum excessus spatiũ Rationale, vt in scholio propos. 27. huius lib. ostẽdimus.) Igitur & excessus rectãguli bis sub AC, CB, & rectãguli bis sub AD, DB, spatiũ est Rationale. Quoniã vero rectangulũ sub AC, CB, ponitur Mediũ, erit & rectangulũ bis sub AC, CB, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis sub AD, DB.[a] Igitur cum Medium non superet medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectangnli bis sub AD, DB, spatium Rationale; Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum. a 27. dec

THEOR. 35. PROPOS. 47. xxxxvj xxxx.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens A B, diuisa in sua nomina in puncto C, ita vt A C, CB, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum vero sub ipsis Rationale, vt vult propos. 41. huius lib. Dico AB, non pos-



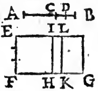
se diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potétia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub A D, DB, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum A C, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, Sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale est; quod ostendemus, vt in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponun-
a 27. decimi. tur esse Media: a Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatium Rationale Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

xlvij. xxxxj.

THEOR. 36. PROPOS. 48.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media A B, diuisa in sua nomina ad C, ita vt AC, C B, potentia incommensurabiles sint. facientes & compositum ex ipsarum qaadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, vt vult propos. 42. huius libri. Dico A B, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet sint etiam lineæ potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis



Medium, incommensurabileque compositо ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunque hoc punctum D existat. Constructio autem eadem fiat, quæ in propos. 45. ostendemusque vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales esse, singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, Mediũ ponitur, erit & EH, illi composito æquale, Medium. Item quia rectangulum sub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi commensurabile est. Igitur Media EH, IH, applicata ad Rationalem EF, (est enim IH, ipsi EF, æqualis) [a] faciũt latitudines FH, HG, Rationales longitudine ipsi EF, incommensurabiles. Eadem quoque ratione probabimus, & rectas lineas FK, KG, Rationales esse, longitudine incõmensurabiles ipsi EF. Quia vero compositum ex quadratis rectarum AC, CB, descriptis, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, ex hypothesi, rectangulo bis sub AC, CB, nempe rectangulo IG; [b] estque vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus: Sed ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum commensurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demonstrabimus & FG, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, [c] iam ante demonstratum est. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in sua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

a 23. decimi.

b 1. sexti

c 43. decimi.

DEFINITIONES
SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus pos-

ſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expoſitæ Rationali longitudine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

IIII.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, non poterit vtrũque nomen exposita Rationali commensurabile esse longitudine; (alias enim nomina ipsa essent quoque lineæ longitudine inter se commensurabiles, vt in scholio propos. 12. huius libri docuimus. quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inæqualia sunt; (alias enim essent lineæ inter se longitudine cõmẽsurabiles. quod nõ ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, constituentur vna cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, nimirũ prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis, efficientur vna cum eisdem tribus generibus aliæ tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile antecedit incommensurabile, vt manifestum est.

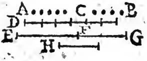
RVRSVS recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine exposita lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ exposita longitudine est commensurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cum minus a maiori contineatur; tertiam ve-

re, in qua neutrum ipsorũ nominũ exposita Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

xlviij. xxxxij. PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex iis quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad A C, ita per coroll. propos. 6. huius libri quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex E F, F G, cum



a 6. dec. proportionem habeant, quam numeri AB, AC, a commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est E F, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia vero AB, ad A C, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, F G, proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. b Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ E F, F G. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia solum commensurabiles; c Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse, Cum enim sit vt numerus AB, ad numerum A C, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex F G, sit autem A B, maior, quam A C, erit quoque quadratum ex E F, maius quam quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propos. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur est vt AB, numerus ad

b 9. dec.

c 37. dec

AC,

AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad excessum, quo antecedens AB, superat consequētem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex EF, superat consequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [a] ac proinde rectæ EF, & H, longitudine cōmensurabiles sunt. Quoniā igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen EF, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat. a 9. dec.

PROBL. 14. PROPOS. 50. xlix. xliij.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in præcedenti propositione, expositaque Rationali quadā D; sumatur ei longitudine commensurabilis FG. Erit ergo & FG, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam enim quadrata ex FG, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, [b] commensurabilia sunt; b 6. dec. erunt & rectæ FG, EF, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem FG, Rationalis: Igitur & EF, Rationalis est. Quia vero AC, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [c] Incō- c 9. dec. mensurabiles ergo sunt longitudine rectæ FG, EF. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; [d] Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex d 37. dec.

binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cum enim sit vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF: Et conuertendo vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autem AB maior quam AC; erit & quadratũ ex EF, maius, quã quadratum ex FG. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in præcedenti propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque minus nomen FG, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

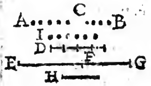
L. xliiij.

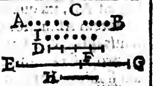
PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cũ non sit quadratus, non habebit ad quadratum AB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quam AC, differet vel sola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidem, quando AC, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quãdo vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt si AC, sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si AC, sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. vnitate, quia vnitas addi-

xxxxx. xvij.





ta ad 5. non facit quadratũ, &c.) Quare vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus, non cadet inter I, ad AC, medius proportionalis. Igitur nõ erunt similes plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exposita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF. a Erunt ergo quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commensurabilia; atque adeo & lineæ D, EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; b erunt D, & EF, rectæ inter se longitudine incommensurabiles. Rursus per dictum coroll. fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. c Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commẽsurabiles, saltem potentia. Igitur cum EF, ostensa sit Rationalis; erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc est, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ; d erunt EF, FG, longitudine incommensurabiles. Sunt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum comensurabiles; e Atque idcirco tota EG, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt I, ad AB, ita quadratum ex D; ad quadratum ex EF; Et vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: Non habet autẽ I, ad AC, proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; f ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam autem est vt

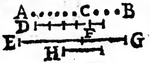
a 6. dec.
b 9. dec.
c 6. dec.
d 9. dec.
e 37. dec.
f 9. dec.

AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; Eſt autem AB,maior quam AC;erit & quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG.Sit ergo maius, per lemma propoſ.14.huius lib.quadrato rectæ H. Oſtendemus iam ſimiliter,vt in 49.propoſ.H,ipſi EF,longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt,quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis;& neutra ipſarum EF,FG,lógitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D, vt demonſtratum eſt; Erit EG,per definitionem,ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

li. xlv. PROBL. 16. PROPOS. 52.

INVENIRE ex binis nominibus quartā.

REPERTIS duobus numeris AC,CB,ita vt compoſitus ex ipſis AB, ad neutrum ipſorum proportionem habeat,quam quadratus ad quadratum,ex ijs, quæ in ſcholio 3.propoſ.29.huius lib.tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur EF.Erit ergo & EF, Rōnalis,cum Rationali D, commenſurabilis ſit. Quod ſi reliqua conſtruantur,vt in propoſ.49. oſtendemus ſimiliter,vt ibi,totam EG, ex binis nominibus eſſe.Dico & quartā eſſe.Erit enim rurſus, vt in 49. propoſ quadratum ex EF,maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius,quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo,vt in 49.propoſ.per conuerſionem rationis eſt,vt AB ad CB,ita quadratum ex EF,ad quadratum ex H:Non eſt autem AB,ad CB,vt quadratus ad quadratum ; neque quadratum ex EF, ad quadratum ex H, erit,vt numerus quadratus ad numerum quadratum. [a] Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt rectæ EF,& H.Itaque cum maius nomen EF,plus poſſit, quam minus FG, quadrato rectæ H,ſibi longitudine incommenſurabilis,& maius rurſus nomen EF, longitudine commenſurabile expoſit



a 9.dec.

Ratio-

Rationali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

PROBL. 17. PROPOS. 53. lij. xlvj.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

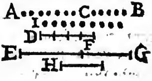
REPERTIS (repetita figura præcedentis propos.) duobus numeris A C, C B, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur FG, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex EF, maius esse, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas EF, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen FG, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

PROBL. 18. PROPOS. 54. liij. xlvij.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis AB, non sit quoque quadratus, habeatque ad neutrũ

ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum;(quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se
30.sep. primos. a Nam hac ratione & totus ad vtrumq; ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finē lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quā quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum.



Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad AB, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. prop. 6. huius lib. & reliqua fiāt, vt in propos. 51. ostēdemusque vt ibi, rectas D, & EF, esse longitudine incommensurabiles; atque totam EG, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, vt in 51. propos. D, & FG, longitudine esse incommensurabiles, esseque quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostēdemus quoque vt in propos. 49. per conuersionem rationis, esse vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cū igitur AB, ad CB, atque adeo quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadra-
9.dec. tus numerus ad quadratum; b erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cum maius nomen EF, plus posſit, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorum nominum EF, FG, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextam. Quod faciendum erat.

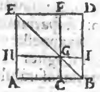
LEMMA.

SI recta linea secta sit vtcunque: erit re-

ctan-

ctangulum sub partibus contentũ, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentũ sub tota, & vna parte, medium propoportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratũ dictæ partis.

SECTA sit recta AB, vtcunque in C. Describatur ex AB, quadratum ABDE, in quo diameter ducatur BE: Ducta autem ex C, recta CF, ipsi BD, parallela; quæ diametrũ secet in G, agatur per G, ipsi AB, parallela HI. Erũt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2.



FH, CI, quadrata partium AC, CB; vtrumque autem rectangulorum DG, GA, comprehensum eisdem partibus: At vero rectangula CD, AI, sub tota AB, & parte CB, cõtẽta. Dico DG, medium proportionale esse inter quadrata FH, CI: At CD, medium esse proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniã enim [a] *vt HG, ad GI, ita est tam FH, ad DG, quam AG, ad CI; erit vt FH, ad DG, ita AG, ad CI:* [b] *Est autem AG, ipsi DG, æquale. Igitur erit quoque vt FH, ad DG, ita DG, ad CI; Atque adeo DG, medium proportionale est inter quadrata FH, CI.* a 1. sexti / b 43. pri.

RVRSVS quia est, [c] *vt AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quã AI, ad CI; erit vt AD, ad CD, ita AI, ad CI: Est autem AI, ipsi CD, æquale. Igitur erit vt AD, ad CD, ita quoq; CD, ad CI. Quare CD, medium proportionale est inter quadrata AD, CI. Eodem modo erit AF, medium* c 1. sexti

proportionale inter quadrata A D, F H.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

Liiij. xLviij. SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipſius A D, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commenſurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; & denique AE, expoſitæ Rationali AB, longitudine commenſurabilis erit. Secetur ED, bifariã in F. Quia igitur A E, plus poteſt quam ED, quadrato rectę ſibi longitudine commenſurabilis, ſi quartæ parti quadrati ex E D, hoc eſt, quadrato ex E F, æquale parallelogrammum ſub AG, GE, contentum, per 2. lemma propoſ. 17. huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; a in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet. Quare AG, GE, partes inter ſe longitudine commenſurabiles ſunt. Ducatur iam per puncta G, E, F, ipſis AB, DC, parallelæ GH, EI, FK. b Et parallelogrammo AH, æquale quadratum fiat L M: At parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN, coniunganturque quadrata LM, MN, ita ad angulum M, vt latera MO, M P, vnam rectam lineam conſtituant O P. Facient ergo & latera MQ, MR, vnã rectã QR, vt demonſtratum eſt à nobis ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. propterea qđ anguli OMQ, P M R, ad verticem M, ſunt æquales, nempe recti.



a 18. dec.

b 14. ſec.

Completo autem rectangulo L N, cum rectæ O M, MP, rectis Q M, M R, æquales sint; ideoque & tota O P, toti QR, [a] sit autem O P, ipsis S N, LT, & QR, ipsis L S, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum L N; ideoque quadratum. [a 34. pri]

QVONIAM vero rectangulum sub A G, G E, æquale est, per constructionem, quadrato ex EF, [b] erit vt AG, ad EF, ita EF, ad G E; [c] Ac propterea & vt A H, ad EK, ita EK, ad G I. Quare E K, medium proportionale est inter A H, GI, hoc est, inter quadrata L M, M N, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, M N, medium proportionale est TM, ex antecedenti lemmate. Aequale igitur est TM, ipsi E K. [d] Cum ergo ipsi T M, æquale sit MS, [e] & ipsi E K, æquale sit F C, erit & M S, ipsi F C, æquale. Quocirca totum quadratum L N, toti rectangulo A C, æquale est; atque adeo recta O P, potest spatium AC, contentum sub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico O P, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur. [b 17. sex] [c 1. sexti] [d 43. pri] [e 36. pri]

QVONIAM enim A G, G E, ostensæ sunt longitudine commensurabiles, [f] erit & tota A E, vtrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem A E, cum sit maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commensurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem A B, ex scholio propos. 12. huius lib. longitudine commensurabiles sunt; Atque adeo cum AB, sit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. [g] Quare rectangula AH, G I, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contenta Rationalia sunt: Ideoque & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rationales erunt. [f 16. dec] [g 20. dec]

ET quoniam A E, ipsi E D, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis A G, & ipsi E D, commensurabilis est longitudine E F, eius dimidia; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & A G, E F, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & A H, E K, [h] eandem proportionem habentia, quam A G, E F, [i] incommen- [h 1. sexti] [i 10. dec]

surabilia sunt. ac proinde & LM, MT, illis æqualia, sunt
a 10dec incommensurabilia. a Igitur rectæ OM, MP, longitudi-
b 1.sex. ne sunt incommensurabiles. b cum eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autem & OM, MP, Rationales ostensæ. Igitur OM, MP, Rationales sunt potentia solum commensurabiles.
c 37.sex c Quapropter tota OP, potens spatium AC, Irrationalis est quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 38. PROPOPOS. 56.

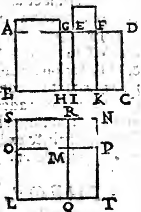
Li x. xLix. SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quę ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineã, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit.n.ipsius AD, maius nomẽ AE, Erũt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus potest quam ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique ED, Rationali expositæ AB, longitudine cõmensurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua constituantur, vt in antecedenti propositione. Quo facto demonstrabimus similiter, vt ibi, rectam OP, posse spatium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico iam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incõmensurabilis est ipsi ED; & ED, minus nomẽ existẽs ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine commensurabilis est Rationali AB; d erunt AE, AB, longitudine in-
d 13.de commensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in ante

cedenti propositione longitudine commensurabiles;[a] erit quoque tota AE, vtrique ipsarum commensurabilis. Quare cum AE, maius nomẽ existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales. Cum ergo vtraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at vero AE, Rationali AB, longitudine incõmensurabilis;[b] erit vtraque AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine; Ac proinde tam AB, AG, quã AB, GE, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Igitur rectangula AH, GI, Media sunt, proptereaque & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ OM, NP, sunt Mediæ.

a16.deci



b14.dec

c22.dec

QVIA vero AG, GE, longitudine sunt commensurabiles;[d] erunt & AH, GI, eandẽ cum illis proportionẽ habentia commensurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, commeusurabilia sunt. Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi vero AE, ostensa est longitudine commensurabilis AG, & ipsi AD, longitudine commensurabilis est EF, eius dimidia; erunt per scholium propos. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommẽsurabiles: Ac proinde AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipsis,[e] incommensurabilia sunt. Igitur & LM, MT, ipsis AH, & EK, æqualia, incommensurabilia sunt;[f] Ideoq; & rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles,[g] cum eandem habeant proportionem, quam LM, MT. Cum ergo ostensum sit OM, MP, Medias esse, & commensurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quoniam denique ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi AB, hoc est, ipsi EI. Est autem EF, ipsi ED, quoque longitudine commensu-

d10.dec

e10.dec

f10.dec

g1.sext.

a12.dec rabilis;a erunt etiam EI,EF,longitudine commensurabiles; Ac propterea cum EI,Rationalis sit,erit & EF, Rationalis.b Quare EK,rectangulum, Rationale est ;Est au- b20.dec tem MT,sub OM,MP, contentum ipsi EK,æquale. Igitur & MT, Rationale est. Quapropter OM,MP, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, Rationaleque continentes;c atque adeo OP, Irrationalis est, quæ ex binis c38.dec Medijs prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali,& ex binis nominibus secunda, &c.Quod ostendendum erat.

THEOR. 39. PROPOS. 57.

Lvj. L. SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia A D.Dico rectam,quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ dicitur ex binis Medijs secunda. Sit enim ipsius A D, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex definitione,Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique neutra ipsarum A E, E D, Rationali expositæ A B, longitudine commensurabilis erit. Secta ED, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt[a] in propos. 55. Similiter ergo, vt ibi, ostendemus rectam O P, posse spatium AC: Et vt in antecedenti propos. 56. rectas O M, M P, esse Medias potentia tantum commensurabiles; propterea quod AE, Rationali AB, po-



nitur

nitur longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem AE, ipsi AB, longitudine erat incommensurabilis. Quoniam vero ED, EF, sunt commensurabiles longitudine; estque ED, ipsi AB, Rationali, hoc est ipsi EI, longitudine incommensurabilis; a erit quoque EF, eidem EI, longitudine incommensurabilis: Sunt autẽ EF, EI, Rationales, quod EF, dimidia sit ipsius ED, Rationalis; & EI, expositæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; b Ac propterea EK, Medium est: ideoque & MT, æquale ipsi EK, Medium est, quod sub Medijs OM, MP, continetur. Itaque cum OM, MP, Mediæ sint potentia solum commensurabiles, contineantque spatium Mediũ; c erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demõstrãdũ. a 14. dec b 22. dec c 22. per

THEOR. 40. PROPOS. 58. Lvij. Lj.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim AE, ipsius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ lineæ longitudine sibi incommensurabilis, & denique AE, ipsi AB, commensurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propos. 55. d Erunt ergo AG, GE, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus iam eodem modo, vt ibi, OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam enim AG, GE, longitudine incom- d 19. dec

mensu-

a 10. dec mensurabiles sunt;[a] erunt & rectãgula AH,GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommensurabilia; atque adeo & quadrata LM,MN,ipsis AH,GI, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia sunt incommẽsurabiles. Quia vero AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis;[b] & rectangulum AI, sub ipsis contentum, Rationale. b 20. dec Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Compositum ergo ex quadratis LM,MN. Rationale est.

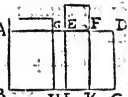
ET quoniam ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Rationali AB; erit & EF, ipsius dimidia eidẽ AB, longitudine incommensurabilis; Et est EF, Rationalis, cum sit Rationali ED, commensurabilis. Igitur EF, & AB, Rationales sunt potentia solum commensurabiles.[c] Quare c 22. dec EK, Medium est, sub ipsis contentum; ideoque & MT, illi æquale, contentumque sub OM,MP, Medium est. Quocirca cum OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis LM, MN, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis MT, Medium;[e] Irrationalis erit tota OP, quæ *Maior* nominatur. d 40. dec Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendum.

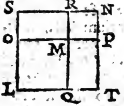
THEOR. 41. PROPOS. 59.

Lviij.
Lij.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ dicitur potẽs Rationale & Medium. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tan-





tum commensurabiles;& AE, plus potest, quam ED, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis:& denique ED, longitudine commensurabilis est expositæ Rônali AB. Secta ED, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propos. 55. a Erunt igitur rursus AG, GE, longitudine incommensurabiles. Simili autem modo, vt in propos. 55. constabit rectam OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propos. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles. Et quia AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentia tantum commensurabiles. b Quare rectangulum AI, sub ipsis cõtentum, Medium est. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Igitur & compositum hoc, Medium erit. Rursus quia ED. Rationalis ponitur longitudine commensurabilis Rationali AB, cum sit minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, erit & EF, ipsius dimidia, eidem AB, commensurabilis longitudine, & Rationalis. c Quare EK, sub Rationalibus EI, EF, longitudine commensurabilibus, Rationale est; atque idcirco & MT, sub OM, MP, contẽtum Rationale erit, cum ipsi EK, sit æquale. Quamobrem cum rectæ OM, MP, potentia incõmensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarũ quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, sub ipsis contentum, Rationale; d Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur põtens Rationale, & Medium. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

a 19. dec
b 22. decimi.
c 20. dec
d 41. dec

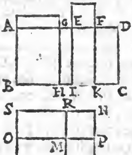
THEOR. 42. PROPOS. 60.

lix. liij.

SI spatium contineatur sub Rationali,

& ex binis nominibus Sexta ; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali AB.& ex binis nominibus sexta AD. Dico rectam,quę spatium AC,potest, Irrationalem esse, quæ dicitur potēs bina Media. Sit enim ipsius AD, maius nomen A E. Sunt ergo AE,ED,ex defi. Rationales potentia tantum commensurabiles,& AE,plus poterit,quam ED,quadrato rectę sibi longitudine incommensurabilis; & deniq; neutra ipsarum AE, E D, longitudine erit comensurabilis Ra-
a19.dec tionali AB. Fiant omnia, quæ in superioribus, a eruntque AG,GE,longitudine incommensurabiles. Iam vero ostēdemus similiter, vt in propos. 55. rectam O P, posse spatium AC. Item vt in propos. 58. rectas OM,MP,potentia esse incommensurabiles. Rursus, vt in antecedent



propos. erit compositum ex quadratis LM,MN,Medium. Vt autem in propos. 58. erit quoque M T, sub OM,MP,comprehensum,Medium Et quia duarum rectarum A E, EF illa quidem incommensurabilis e longitudine ipsi E D, hæc vero ei
b13.dec dem commensurabilis; b erunt AE EF, longitudine incommensurab
c1c.dec les. c Igitur & AI, EK, incommen
d1.sexti surabilia sunt. d cum eandem ra tionem habeant, quam A E, E Quare & compositum ex quadra tis L M, M N, quod ipsi A I, æquale est, & rectangu lum MT, quod ipsi EK, est æquale, incommensurabilia sunt. Quapropter cum rectæ O M, M P, sint potentia i commensurabiles, faciātque & compositum ex ipsaru quadratis LM, MN, Medium, & MT, sub ipsis conte tum, Medium, incommensurabileque composito ex ips
e42.dec rum quadratis, e erit tota OP, Irrationalis, quæ bina M

dia

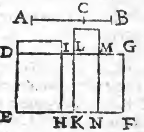
dia potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

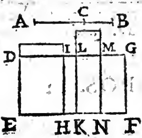
lx. liiij.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primã.

SIT ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC; a & ad Rationalem expoſitam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus eſſe primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis ſub AC, CB, continetur, cum quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis ſub AC, CB, b æqualia ſint quadrato ex AB, quemadmodum & eidẽ quadrato ex AB, æquale eſt, per conſtructionem, rectangulum DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipſis IK, GF, parallela agatur MN; eritque vtrũque rectangulum LN, MF, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur. c Et quoniam AC, CB, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quod tota AB, ſit ex binis nominibus; erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commenſurabilia; d quorum vtrique cum etiam commenſurabile ſit compoſitum ex ipſis; erit quoque compoſitum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Eſt autem huic compoſito æquale, per conſtructionem, rectangulum DK. Igitur & DK, Rationale erit: quod cum applicatum ſit ad Rationalem DE, e faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipſi DE, longitudine commenſurabilem.



a 45. pri.
b 4. ſec
c 37. decimi.
d 16. decimi.



RVRSVS quia AC, CB, Rationales sunt solum potentia commensurabiles,[a] erit rectangulum sub ipsis, Medium, atque adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum LF, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare LF, applicatum ad LK, Rationalem,[b] facit LG, latitudinem Rationalem, & ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Est autem DL, ostensa eidem DE, commensurabilis longitudine.[c] Igitur DL, LG, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantum cõmensurabiles;[d] Ac propterea DG, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

a 22. decimi.

b 23. decimi.

c 13. decimi.

d 37. decimi.

QVONIAM enim ex lẽmate propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC, CB, medium proportionale est inter quadrata ex AC, CB, erit quoque LN, medium proportionale inter DH, IK, atque adeo[e] cum rectæ DI, LM, IL, eandem rationem habeant, quam DH, LN, IK; erit quoque recta LM, media proportionalis inter DI, IL.[f] Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, commẽsurabilia sunt, quod AC, CB, ponantur potentia commensurabiles; erunt & DH, IK, ipsis æqualia commensurabilia.[g] Igitur & rectæ DI, IL, eandem cum illis habẽtes rationem, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem DK, maius est, quam LF, quod & quadrata ex AC, CB, maiora sint, per lemma propos. 39. huius libri, quam rectangulum bis sub AC, CB; erit & recta DL, maior quam LG,[h] cum DL, LG, eandem rationem habeant, quam DK LF. Itaque quoniam DL, maior est, quam LG, & ad DL applicatur rectangulum sub DI, IL, deficiẽs figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex minore LG, descripti; (ostensum enim est rectãgulum sub DI, IL, æquale quadrato ex LM.) diuiditurq; DL, ad I, in partes DI, IL, lõgitudine commensurabiles vt est demonstratum;[i] poterit DL, maior plus quã LG

e 1. sexti

f 17. sexti.

g 10. decimi.

h 1. sexti.

i 18. dec.

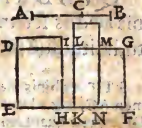
minor,

minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum DG, ostensa sit ex binis nominibus, & DL, maius nomen plus posse, quam LG, minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem maius nomen DL, longitudine commensurabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 44. PROPOS. 62. Lxj. Lv.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT ex binis Medijs prima AB, cuius maius nomen AC, a & ad Rationalem DE, applicetur rectagulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse secundam. Constituatur enim eadem, quæ in propos. præcedenti, ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, CB. & & vtrumque ipsorum LN, MF, ei quod sub AC, CB, cõtinetur. Quoniam igitur AC, CB, ex binis Medijs primam AB, componentes b Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale cõtinent; erunt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, atque Media. c Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. DK, Mediũ, quod cum applicatum sit ad Rationalem DE, d erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub AC, CB, Rationale est, erit & eius duplum, nempe LF, Rationale, quod cum applicatum sit ad Rationalẽ LK, e erit eius latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine com-



a 45. primi.

b 38. dec

c 16. dec

d 23. decimi.

e 21. dec.

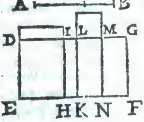
mensurabilis. Quare cum duarum rectarum DL,LG,ipsa LG,sit ipsi DE,commensurabilis longitudine,at DL,lon-
a13.dec gitudine incommensurabilis,a erunt DL,LG,longitudine incōmensurabiles. Quod cū DL,LG, ostensæ sint Rationa
les;erunt ipsæ Rationales potentia solum commensurabi
b37.dec les;[b] ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in antecedenti propos.demonstrabimus DL,maius nomen esse,& posse plus,quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius DG,maius nomen DL,plus posit,quam minus nomen LG,quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis,& minus nomen LG,ostensum sit longitudine commēsurabile Rationali expositæ DE;erit ex defin.DG, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius,quæ est ex binis Mediis prima, &c. Quod erat ostendendum.

L xii. Lvi.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda,ad Rationalem applicatū,latitudinē facit ex binis nominibus tertiā.

SIT ex binis Mediis secunda AB, cuius maius nomen AC, c & ad Rationalem DE,applicetur rectangulū
c45.1.pri DF,æquale quadrato ex AB,latitudinem faciens DG. Dico DG,esse ex binis nominibus tertiam. Constructis enim iisdem, quæ in propos.61,quoniam AC,CB,ex binis Me-
d39.dec diis secundam AB,componentes, d Mediæ sunt potentia solum commēsurabiles,quæ Mediū continēt;Erūt quadrata ex AC,CB,atque adeo rectangula ipsis æqualia DH,IK,commensurabilia, & Media e Cum er-
e16.dec go propterea & totum DK, vtrique ipsorum DH,IK,sit commensurabile;erit & ex coroll.propos.24. huius libri DK,Me-



dium;quod cum applicatum sit ad Rationalem DE, f eri
f23.dec eius latitudo DL,Rationalis ipsi DE,longitudine incom-

men-

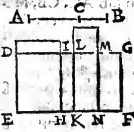
mensurabilis. Rursus quia rectãgulum sub AC, CB, Medium est; erit & eius duplum LF, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem LK; [a] erit latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, ipsi CB, longitudine est incommensurabilis; estque vt AC, ad CB, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, [b] erit quoque quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommẽsurabile. [c] Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, CB, quod quadrata ex AC, CB, commensurabilia sint, quippe cum rectæ ipsæ potentia ponantur commensurabiles; & rectangulo sub AC, CB, commensurabile est eius duplum, nimirum rectangulum bis sub AC, CB. Igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectangulum DK, incommensurabile est rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, rectangulo LF, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius libri conscripsimus. Quare rectæ DL, LG, eandem rationem cum DK, LF, habentes [d] longitudine sunt incommensurabiles: Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; [e] ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61. ostendemus DL, esse maius nomen, posseque plus, quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrẽ cum DL, maius nomen plus possit, quam LG, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, LG, Rationali expositæ DE, sit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defin. DG, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonstrandum.

a 23. dec
b 10. dec
c 16. dec.
d 10. dec
e 37. dec

THEOR. 46. PROPOS. 64.

Lxiij.
Lvij.

QVADRATVM Maioris ad Rationalẽ applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



a45.pri SIT Maior AB, cuius maius nomen A C, a & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse quartam. Construantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia AC, CB, Maiorem A B, componentes, b potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum vero sub ipsis, Medium; erit quoque DK, composito ex quadratis rectarum A C, CB, æquale existens, Rationale; At vero LF, duplum eius quod sub AC, CB, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale DK, ad Rationalem DE, est applicatum; c erit DL, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cum L F, Medium sit applicatum ad Rationalem LK, d erit LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, DE, lõgitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, LG, illa quidem ipsi DE, commensurabilis sit longitudine hæc vero eidem DE, longitudine incommensurabilis; e incommensurabiles erunt longitudine DL, LG: Ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LH, Rationales potentia tantum commensurabiles; f ideoque D G, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM. Quia autem quadrata ex AC, CB, incõmensurabilia sunt, quod rectæ AC, CB, potentia incommensurabiles sint; Erunt etiam illis equalia DH, IK, incommensurabilia; g atque adeo & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam vero vt in propos. 61. ostedimus, DL, maior est, quam LG, & ad DL, applicatum est rectangulum sub DI, IL, quadrato ex L M, hoc est, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata; quod diuidit ipsam D L, ad I, in partes longitudine incommensurabiles, h poterit DL, plus quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa

b45.dec
c21.dec
d23.dec
e13.dec
f37.dec
g10.dec
h19.dec

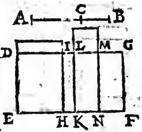
DL,

DL,(maius nomen ipsius DG, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quarta, Quadratum ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 47. PROPOS. 65. Lxiiij. Lviij.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen AC,[a] & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam esse. [a] 45. pri
Fiant enim eadem omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium,[b] potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis contentum, Rationale; erit DK, æquale composito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium, & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atque adeo ipsius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE,[c] facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommensurabilem: At vero Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, [d] facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali DE, illa vero longitudine incommensurabilis, [e] erunt DL, MG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rõnales sunt potentia solum commensurabiles, [b] 41. dec



[c] 23. dec
[d] 21. dec
[e] 13. dec

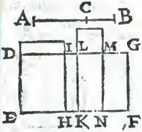
a37:dec a Ac propterea DG, est ex binis nominibus.Iam vero, vt in propos.61.ostendemus rectangulum sub DI, IL,æquale esse quadrato ex LM,& vt in antecedente propos. DL, maius nomen esse,atque posse plus,quam L G, quadrato rectę sibi lõgitudine incommensurabilis. Quapropter cũ & minus nomen LG,ostensum sit expositę Rationali DE, longitudine commensurabile;erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius,quæ Rationale ac Medium potest,&c.Quod demonstrandum erat.

Lxv. Lix.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius,quæ bina Media potest,ad Rationalem applicatum,latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

b45.pri SIT bina Media potens recta A B, cuius maius nomen AC,[b] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulũ DF,æquale quadrato ex AB,latitudinem faciens DG. Dico D G, esse ex binis nominibus sextam.Constructis enim iisdẽ,quæ in propos. 61.quoniam rectæ A C, CB,componentes ipsam AB,potentem bina Media, c potentia incommensurabiles sunt,faciũtque & cõpositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile composito ex quadratis ipsarum;



c42.dec erit tam DK,illi composito æquale, quam L F, rectangulo bis sub AC, CB,æquale, Medium. Et quia Media D K, LF,applicata sunt ad Rationalem DE;[d] erunt eorum latitudines D L, L G, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles.[e] Quoniam vero compositum ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC,CB;eidem vero rectangulo sub A C, C B, commensurabile est rectangulum bis sub A C, C B, cum hoc illius sit duplum;[f] Erit compositum ex dictis quadratis,hoc est, D K, incommensurabile rectangulo bis sub

d23.dec

e42.dec

f13.dec

AC,

AC,BC,hoc est, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, [a] longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL,LG, potentia solum commensurabiles; [b] Ac proinde DG,est ex binis nominibus. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen, posseque plus quam LG,quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum ergo ostensum sit neutram ipsarum DL,LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin.DG,ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Quod erat ostendendum.

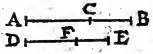
a 10.dec.
b 37.dec

THEOR. 49. PROPOS. 67.

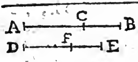
Lxvi.
Lx.

EI, quæ est ex binis nominibus,longitudine commensurabilis,& ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque AB,diuisa in sua nomina, quorum maius AC,& CB,minus,sitque recta DE, ipsi AB, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi AB. [c] Fiat enim vt tota AB,ad totã DE,ita ablata AC, ad ablatã DF. [d] Erit ergo& reliqua CB,ad reliquã FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, longitudine commensurabilis ponitur DE; [e] erit & DF,ipsi AC,& FE,ipsi CB,longitudine commensurabilis: [f] Sunt autem AC, CB, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE,Rationales sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB,ad FE,& permutando vt AC,ad CB,ita DF, ad FE: Sunt autem AC, CB,potentia solum commensurabiles; [g] erunt & DF,FE,potentia solum commensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; [h] Ac propterea DE,ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB,ordine eandem esse. Aut .n. AC,plus potest



c 12.sex
d 19.qn.
e 10.dec
f 37.dec
g 10.dec
h 37 dec



quam CB, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem AC, plus potest quam CB, quadrato re-
a15.dec ctæ sibi longitudine commensurabilis; a poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si AC, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominibus pri-
b12.dec ma; b erit & DF, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cum vtraque, & Rationalis, & DF, eidem AC, sit commensurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si vero CB. expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt AB, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & FE, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum AC, CB, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt AB, sit ex
c12.dec. binis nominibus tertia; c erit & neutra ipsarum DF, FE, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

AT si AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi
d15.dec longitudine incommensurabilis; d poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextã, prout & AB, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD si recta DE, potentia tantum commensurabilis sit ipsi AB, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus vbique: commensurabilis potentia tantum:) & DE, esse ex binis nominibus. At eam esse ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est, nullo mo-

do con-

do concludemus. Nō enim sequitur, si AC, maius nomen longitudine sit commensurabile exposita Rationali; & DF, maius nomen eidēm esse commensurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe exposita Rationalis, & DF, eidem AC, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine: At vero DF, potentia tantum, ex hypothesi. Immo vero, si AB, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt DE, illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

SIT enim AB, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C, sitque ei commensurabilis potentia tantum DE, quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad F, & partes AC, CB, partibus DF, FE, proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri posse, vt DE, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi AB. Nam si potest fieri, sit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumque maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali exposita commensurabilis longitudine. a Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita AB, ad DE, b erunt propterea & AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neque vtraque ex binis nominibus quarta erit. Sed neque secunda vel quinta. Esset enim vtrumque nomen minus CB, FE, ex defin. longitudine commensurabile Rationali exposita, atque adeo & inter se. Igitur & tota AB, DE, longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.

SEMPER tamen verum est, si AB, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilem, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quam CB, quadrato recta sibi longitudine cōmensurabilis. Cum ergo sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, c poterit

a 12. dec

b 10. dec

c 15. dec

terit quoque DF, plus quam FE, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit D E, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, quam CB, quadrato recta sibi longitu-
a15.dec *dine incommensurabilis; a poterit quoque D F, plus quam FE, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, cũ sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi AB.*

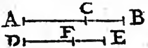
IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

Lxvij. Lxj.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ est ex binis Medijs, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Medijs est, atque ordine eadem.

SIT ex binis Medijs AB, quæcunque diuisa in sua nomina, quorum AC, maius, & CB, minus, sitque ei recta DE, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoque ex binis Medijs esse, & ipsi AB, ordine eandem.



b12.sex b Fiat enim vt tota AB,
c19.qn. ad totam DE, ita ablata A C, ad ablatam DF. c Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, ponitur longitudine commensurabi-
d10.dec lis DE; d erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine
e24.dec commensurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. e Igitur & DE, FE, illis commẽsurabiles, Mediæ sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad
f38.dec CB, ita DF, ad FE: f Sunt autem AC, CB, potentia solum
g10.dec commensurabiles; g erunt & DF, FE, solum commensurabiles potentia. Cum ergo & ostensæ sint Mediæ, erũt DF,
h38.uel FE, Mediæ potentia tantum commensurabiles; h Atque
39. dec. idcirco DE, erit ex binis medijs. Dico & ipsi AB, eandem esse ordine. Quoniam.n. est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE:

Est

Est autem vt AC,ad CB,ita quadratum ex AC,ad rectã gulum sub AC,CB,& vt DF, ad F E, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum sub DF,FE,ex lemmate 3.propos. 19.huius libri;erit quoque vt quadratum ex AC , ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF , ad rectangulum sub DF,FE;& permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF,ita rectangulum sub AC,CB, ad rectangulum sub DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF;quod rectæ AC,DF,commensurabiles ostensæ sint longitudine.[a] Igitur & rectangulum sub AC,CB,rectangulo sub DF,FE,commensurabile est. a 10.dec
Quare si rectangulum sub AC,CB,fuerit Rationale, ita vt AB,sit ex binis Medijs prima; erit & rectangulum sub DF,FE,Rationale,cum illi sit commensurabile; [b] atque adeo & DE,ex binis Medijs prima erit.Si vero rectangulum sub AC,CB, fuerit Medium , ita vt A B, sit ex binis Medijs secunda:erit & rectangulum sub DF,FE, ei commensurabile,Medium,ex corollario propos. 24.huius lib. b 18.dec
[c] Ac propterea & DE,erit ex binis Medijs secunda.Quare ei, quæ ex binis Medijs longitudine commensurabilis,&c. Quod demonstrandum erat. c 39.dec

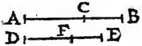
SCHOLIVM.

EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineã DE, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi AE, quæ est ex binis Medijs, ex binis Medijs esse, atque ordine eãdẽ ipsi AB, cui commensurabilis est, si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantum, &c. vt manifestum est.

THEOR. 51. PROPOS. 69. Lxviij. Lxij.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior AB,diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tãtum. Dico & DE, Maiorẽ esse. Fiant.n.eadẽ, quæ superius;ita vt partes AC,CB,ad partes DF, FE,ean-



dem habeant rationem, quam tota AB, ad totã DE. Quoniã igitur AB, DE, cõmensurabiles sunt vel lõgitudine & potẽtia, vel potẽtia tm; [a]
a10.dec. erunt quoque tam AC, DF, quam CB, FE, eodẽ modo cõmensurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad
b22.sex FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, [b] erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarũ AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, quadrato ex FE, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia
c10.dec. tantum. [c] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile est composito ex quadratis
d40.dec rectarum DF, FE. [d] Est autem compositum illud Ratio-
e9.defin nale, cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. [e] Igitur & hoc Rationale est.

RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectãgulum sub DF, FE: Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB; ad rectangulum sub DF, FE: Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commensurabile, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & poten
f10. dec tia, vel potentia tantum. [f] Igitur & rectangulũ sub AC,
g40.dec CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. [g] Est

autem

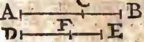
[a]utem rectangulum ſub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum ſub DF, FE illi commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Quoniam vero eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE,[a] ſuntque AC, CB, potentia incommenſurabiles, cum componant Maiorem AB;[b] Erunt quoque DF, FE, potentia incommenſurabiles. Itaq; cum DF, FE, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium, vt oſtenſum eſt; [c] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commenſurabilis & ipſa Maior eſt. Quod demonſtrandum erat.

a 40. dec
b 10. dec
c 40. dec

THEOR. 52. PROPOS. 70. Lxix. Lxiij.

RATIONALE ac Medium potenti commenſurabilis, & ipſa Rationale ac Medium potens eſt.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & DE, eſſe potẽtem Rationale ac Medium. Constructis n. iiſdẽ quæ ſupra, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, FE.[d] Eſt autem illud compoſitum Medium, cum rectæ AC, CB, componant ipſam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propoſ. 24. huius lib. & hoc compoſitum illi commenſurabile, Medium eſt. Eodem modo, vt in eadem propoſ. antecedenti, erit rectangulum ſub AC, CB, [e] quod Rationale eſt, commenſurabile rectangulo ſub DF, FE, atque adeo & rectangulum ſub DF, FE, Rationale eſt, ex 9. defin. Denique vt in eadem ſuperiori propoſ. erunt DF, FE, potentia incommen ſurabiles. Quare cum D F, FE, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale, vt demonſtratum eſt; [f] erit to-



d 41. dec
e 41. dec.
f 41. dec

ta DE, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

Lxx. Lxiv.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

SIT bina Media potens AB, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potẽtia ſiue potẽtia tantũ. Dico & DE, eſſe bina Media potẽtẽ. Cõſtructis enim iiſdẽ, quæ ſupra, oſtẽdemus, vt in propoſ. 69. cõpoſitũ ex quadratis rectarũ AB, CB, cõpoſito ex quadratis rectarũ DF, FE, commenſurabile eſſe:



Nec non & rectangulum ſub AC, a42.dec CB, eſſe cõmenſurabile rectangulo ſub DF, FE.[a] Cũ ergo tam compoſitũ ex quadratis rectarũ AC, CB, quã rectãgulũ ſub AC, CB, Mediũ ſit; erit etiam ex coroll. propoſ. 24. huius lib. tã compoſitũ ex quadratis rectarũ DF, FE, quã rectangulũ ſub DF, FE, Mediũ. Sed & DF, FE, poten- b42.dec tia incõmenſurabiles ſunt, vt prius. Poſtremo [b] quia cõpoſitũ ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulũ ſub AC, CB, incommẽſurabilia ſunt, ex hypotheſi, propterea quod AB, bina Media poteſt; Eſt autẽ cõpoſito ex quadratis rectarũ AC, CB cõmenſurabile oſtẽſum cõpoſitũ ex quadratis rectarũ DF, FE, & rectãgulo ſub AC, CB, probauimus cõmenſurabile rectãgulũ ſub DF, FE; Erunt quoque ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitũ ex quadratis rectarũ DF, FE, & rectangulum ſub DF, FE, incõmẽſurabilia. Quare cũ rectæ DF, FE, potentia ſint incõmẽſurabiles, faciantq; compoſitum ex ipſarũ quadratis Mediũ; & quod ſub ipſis cõtinetur, Medium, incõmẽſurabileque c42.dec cõpoſito ex quadratis ipſarum; [c] erit DE, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commenſurabilis, & ipſa Media potens eſt. Quod erat oſtendendum.

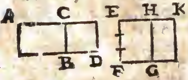
Lxxj. Lxv.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componan-

tur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quę ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Rationale ſpatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum ſpatium AD, poteſt, eſſe vel ex binis nominibus, vel ex binis Medijs primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim AB, vel maius quam CD, vel minus: Aequale ſiquidẽ non erit; alias cum AB, ſit Rationale, eſſet & illi æquale CD, Rationale. quod non ponitur. Sit primo



maius, a & expoſita Rationali EF, applicetur ad eam rectangulum EG, æquale ipſi AB, & ad HG, aliud HI, æquale ipſi CD, vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Et quoniam AB, Rationale eſt, & CD, Medium, erit quoque EG, Rationale, & HI, Medium; quæ cũ applicentur ad Rationalẽ EF, b erit EH, Rationalis, & ipſi EF, longitudine commenſurabilis; c At vero HK, Rationalis, & eidẽ EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia EG, HI, incõmenſurabilia ſunt, vt conſtat ex definitionibus; quod EG, Rationale ſit, at HI, Irrationale, nempe Mediũ; d erunt EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, incommenſurabiles longitudine. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles; e Ac propterea EK, ex binis nominibus eſt. Et quoniã maius ponitur AB, quam CD, hoc eſt, EG, quam HI; erit quoque EH, maior quam HK, f cum EH, HK, eandẽ rationem habeant, quã EG, HI. Iam vero maius nomen EH, plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit EH, quam HK, quadrato rectę ſibi commenſurabilis longitudine; erit EK, ex defin. ex binis nominibus

a 45. pri.
b 21. dec.
c 23. dec.
d 10. dec.
e 37. dec.
f 1. ſex.

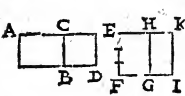
prima, cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & spatium AD, compositum ex Rationali AB, & Medio CD, [a] Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

a 55. decimi.

SI vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & spatium AD, [b] Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

b 58. dec.

SIT deinde AB, minus quam CD, & eadẽ construantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus & EH, ipsi EF, longitudine commensurabilis. Et quia AB, minus est quam CD, hoc est, EG, quam HI; erit quoque recta EH, minor quam HK. Poterit igitur rursus HK, maius nomen ipsius EK, quæ est ex binis nominibus, plus quam EH, minus nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis.



Si plus possit Hk, quam EH, qnadrato rectę longitudine sibi commensurabilis; erit EK, ex binis nominibus secunda, cum EH, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali EF, vt ostensum est. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus secunda EK, atque adeo & spatium AD, ex Rationali AB, & Medio CD, compositũ, [c] Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Mediis prima.

c 56. decimi.

SI vero HK, plus possit quã EH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, erit EK, ex binis nominibus quinta, cum EH, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF, Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeo & spatium AD,

Irra-

a Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demostrandũ erat. a 59. dec

THEOR. 55. PROPOS. 73. Lxxij. Lxvj.

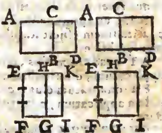
SI duo media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

COMPONANTUR duo Media incommensurabilia AB, CD. Dico rectam quæ potest totum spatium A D, esse vel ex binis Mediis secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus AB, vel maius, quam CD, vel minus: Aequale siquidem non erit; alias essent AB, CD, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia AB, CD, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia EG, HI, Media & incommensurabilia; cum illis sint æqualia. b Igitur rectæ EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtraque (cum EG, HI, Media sint, applicenturque ad Rationalem EF,) c Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis, Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solum commensurabiles; d ac propterea EK, ex binis nominibus est. Quoniam vero AB, maius ponitur quam CD; erit vt in antecedeti propos. EH, maius nomen ipsius EK. Poterit ergo plus quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH, quam HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cum vtrumque nomen EH, HK, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus

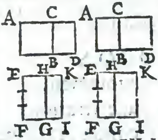
b 10. dec

c 23. decimi.

d 37. dec



tertia. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rõnali EF, & ex binis nominibus tertia E K, atque adeo



a57.dec & ſpatium AD, a Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur.

SI vero EH, plus poſſit quã HK, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabili s, cũ vtrumque nomen EH, HK, longitudine ſit incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus ſexta, vt conſtat ex defin. Recta igitur potens ſpatium EI, ſiue ſpa

b60.dec tium AD, b Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

QVOD ſi AB. minus ſit, quam C D, non aliter propoſitum concludemus, vt ex figura conſtat. Quapropter ſi duo Media inter ſe commenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eaſdem eſſe.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum,

c23.dec c latitudinem efficit Rationalem ipſi Rationali longitudine incõmenſurabilem.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem

d61.dec applicatum; d latitudinem efficit ex binis nominibus primam.

ET quadratum eius, quæ eſt ex binis Medijs prima ad Ratio-

e62.dec nalem applicatum, e latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, ad Rationalem applicatum, f latitudinem facit ex binis nominibus ter-

f63.dec tiam.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, g la-

g64.dec titudinem facit ex binis nominibus quartam.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt ad Rationalem applicatum, h latitudinem facit ex binis nomini-

h65.dec bus quintam.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Ratio-

i66.dec nalem applicatum, i latitudinem facit ex binis nominibus ſextam

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; Inter se autem, quod ordine non sint eędem ex binis nominibus: perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de septem senarijs.

IN primo, qui continetur propos. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Medijs prima; & eius, quæ ex binis Medijs secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

IN secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuisionibus, docens singulas in singulis duntaxat punctis diuidi posse in sua nomina.

IN tertio deinde contento propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, secundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & sextæ.

IN quarto, quem absoluũt propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæ sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quænam linea Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

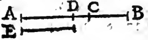
IN quinto autem, quem reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN sexto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absoluitur, demonstrauit lineam quamcunque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

IN septimo denique contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rursus differentiam aliam sex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his sex lineis Irrationali-

bus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. E recta media proportionalis, ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadē illi, inter cuius nomina media exiſtit.



SIT enim quæcunque Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC, & diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidia AD, vel DB, æqualis ſumatur E. Dico E, mediam eſſe ſecundū Analogiam Arithmeticam, inter AC, CB: & eſſe quoque ex binis nominibus. Quoniam enim AC, ſuperat dimidiam AD, recta DC, & dimidia DB, ſuperat ipſam CB, eadem recta DC; perſpicuum eſt, dimidiā ipſius AB, nempe E, eſſe mediā proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commenſurabilis eſt longitudine toti AB, cum hæc illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi AB, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.

IDEM oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SEQVVNTVR iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadem Euclides demonſtrat de ſex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus ſeptem ſenarijs de Irrationalibus, quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM.
per detractionem.

xiii. viij.

THEOR. 56. PROPOS. 74.

SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR a Rationali AB, Rationalis AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. Dico reliquã BC, Irrationalem esse. Quoniam enim per lemma 3. propos. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, AC; Et sunt



AB, AC, longitudine incommensurabiles; a erunt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, cõmensurabilia. b Igitur & cõpositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB,) rectãgulo vero sub AB, AC, commensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum sub, AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. c Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incõmensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.

a 10. dec

b 16. dec

c 7. sec.

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis no

minibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM cum AB, AC, sint Rationales potentia tantum commensurabiles; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.

137.dec



Lxxiiij
Lxix.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensu-
16.dec rabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commẽsurabilia, b atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et, quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est cõpositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. c Cũ
7.dec. ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile re-



ctangulo bis sub AB, AC.a Quare & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt. Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, a maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur a Media Media, auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat. a17.dec

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomē auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

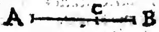
CVM enim AB, AC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale; b erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome prima. b38.dec

THEOR. 58, PROPOS. 76. Lxxv. Lxx.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat, Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangu-

lum sub AB, AC, Medium. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia



commensurabilibus commensurabilia sunt; a erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrumque ipsorum Medium, quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, vtrique commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectãgulum sub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis sub AB, AC, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. b Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium est, rectangulum bis sub A B, A C, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. c Medium autem non superat Medium Rationali: Non ergo quadratum ex BC. Rationale est. Ergo Irrationale, & ipsa recta BC, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secunda, a maiori nomine; vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur a Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

a 16. dec
b 7. sec.
c 27. dec

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuisset proponi.

SI a maiori nomine eius quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

QVONIAM enim AB, AC, Mediæ sunt potentia tantũ commensurabiles, continentque Medium; d erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomẽ ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome secunda.

d 39. dec

THEOR. 59. PROPOS. 77. Lxxvj. Lxxj.

SI a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR a recta AB, recta AC, potentia ipsi AB incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero sub AB, AC, Medium.



Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale; a erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. b Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositũ ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incõmensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. c Igitur quadratum ex BC, illi incõmensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris a maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur a recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 10. *dec*
b 7. *sec.*
c 10. *def*

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

a40.dec *NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusque maius nomen AB, minus autem AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.*

Lxxvij. Lxxij.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectãgulum sub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub AB, b10.def. AC, Rationale; b erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, c 7.sec. AC. c Est autem compositum ex quadratis rectarũ AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, AC. d Sunt ergo rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensu-



d17.dec

rabilia. Cum ergo rectangulum bis sub AB, AC, Rationale sit; [a] erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub AB, AC, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium existit. Si igitur a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat. a10.def.

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autẽ cum Rationali Medium totum efficiens.

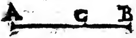
CVM enim AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; [b] erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est AB, minus autẽ AC. Aufertur igitur minus nomen AC, a maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur. b41.dec

THEOR. 61. PROPOS. 79. Lxxviij Lxxiij.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua

Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sitque tam compositum ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incómmensurabileque composito ex ipsarum quadratis.



Dico reliquam BC, esse Irrationalem.
a 7. sec. [a] Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale est rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub AB, AC, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Mediũ etiam est, (cum Medio, quod sub AB, AC, continetur, sit
b 27. dec commensurabile) quadrato ex BC. [b] Medium autem nõ superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens; quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB, AC, quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis reetarum AB, AC, quod Medium etiam est. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod ostendẽdum erat.

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QVONIAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles; faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incõmensurabileque composito ex quadratis ipsarum, [c] erit cõposita, ex illis Irrationalis, quæ bina Media *potens dicitur, cuius ma-*

ius

us nomen AB, et minus AC. Aufertur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem,& secundam, qui inter tertiam magnitudinem,& quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinē, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB,CD,EF, GH, sitque IB, excessus inter AB, CD, æqualis excessui KF, inter EF,GH. Dico eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH. Quoniam enim IB, excessus est inter AB, & CD; erit AI, ipsi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis sint æquales, singulæ singulis. Est autem totorum AB,EF, ex pronunciato 16. lib.1. idem excessus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod est propositum.



COROLLARIVM.

EX his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiā habentes, habere quoque vicissim Arithmeticam Analogiam, quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit exces-

ſus inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

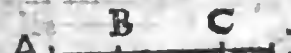
Lxxix. Lxxxiiij.

THEOR. 62. PROPOS. 80.

APOTOMAE vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commẽſurabilis exiſtens toti.

SIT Apotome A B; congruens autem ei Rationalis BC, potentia ſolum toti A C, commenſurabilis. Dico ipſi A B, aliam Rationalem non congruere, quę toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Si enim fieri poteſt, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipſi A D, ſit potentia ſolum commenſurabilis. Et quia B C, Rationalis eſt; erit A C, illi ſolum potentia commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt AC, B C, potentia tantum commenſurabiles. Eodem modo erunt & A D, BD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis ſub A C, B C, qui inter compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD. & rectangulum bis ſub AD, BD; (ſuperat enim compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, rectangulum bis ſub AC, BC, quadrato ex AB; a quod compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale ſit rectangulo bis ſub AC, B C, vna cum quadrato ex A B. Et eodẽ modo compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, ſuperat rectãgulum bis ſub AD, BD, quadrato eodem ex AB; b cum & cõpoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, æquale ſit rectangulo bis ſub AD, BD, vna cum quadrato ex AB.) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, DB. Eſt autem exceſſus inter illa com-





a 7. secũ.

b 7. secũ.

poſita

posita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius lib. quod vtrumque Rationale sit. (Nã cum AC,BC,sint Rationales potentia solum commensurabiles;erunt earũ quadrata Rationalia,& commensurabilia. a Igitur & compositum ex ipsis vtrique illorum commẽsurabile est, atque adeo & Rationale;ex 9.defin. Non aliter Rationale ostendemus cõpositum ex quadratis rectarum AD,BD.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, BC, & rectangulum bis sub AD,BD,spatium Rationale est. b Et quia rectangulum sub AC,BC, Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24.huius lib.& eius duplum,nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium.Eademque ratione Medium erit rectangulum bis sub AD,BD. c Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD,BD,Rationale spatium nõ est.Sed & Rationale ostensum est.Quod est absurdum.Ergo ipsi A B, alia Rationalis non congruit,præter BC, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

a 16. decimi.

b 22. deci

c 27. decimi.

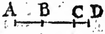
THEOR. 63. PROPOS. 81.

Lxxx. Lxxv.

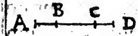
MEDIAE Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media,potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima A B; & ipsi congruat B C, Media toti A C, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Rationale. Dico ipsi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia B D, Media toti A D, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub A D, B D, Rationale. Et quia

BC, Media est potentia solum ipsi A C, commensurabi
a 24. dec. lis; a erit & A C, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter composi-



tum ex quadratis rectarum AC, CB, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub A C, BC, & rectangulum bis sub AD, B D, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrumque sit Rationale. (cum enim rectangulum sub AC, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, B C, illi commensurabile, Rationale, Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub A D, BD. (Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ sunt potentia solum cõmensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Media, &
b 16. dec. commensurabilia. b Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commẽsurabile est, atque adeo & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoque Me-
c 27. dec. dium erit compositum ex quadratis rectarum AD, BD. c Medium autem non superat Medium



Rationali. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia solum commensurabilis; contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomę primæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

Lxxxj. Lxxvj. 1.

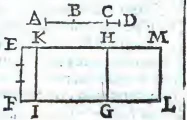
THEOR. 64. PROPOS. 82.

MEDIAE Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia so-

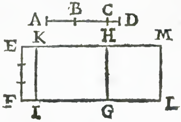
lum

lum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome ſecunda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantum commenſurabilis, & rectangulum ſub AC,BC, ſit Medium. Dico ipſi AB, aliã Mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis, contineatq; cum tota Mediũ. Si.n.fieri pôt, cõgruat ipſi alia BD, Media toti AD, potentia tãtum commenſurabilis, ſitque rectangulum ſub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF. a ad quam applicetur rectangulum EG, æquale compoſito ex quadratis rectarum AC,BC, & ad eandem EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et denique aliud EL. æquale compoſito ex quadratis rectarum AD, BD. b Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur ſub AC, BC. Eodemque modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur ſub AD,BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; (cum enim BC, Media ponatur, c erit & AC, ipſi potentia commenſurabilis, Media) erunt & earum quadrata, Media, & commenſurabilia. Ergo & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt vtrique eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Igitur & EG, quod illi compoſito æquale eſt, Medium eſt; quod cũ applicetur ad Rationale EF, e erit EH, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectãgulum ſub AC,BC, Medium eſt; erit ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & eius duplũ, nempe KG, Medium: quod cum applicetur ad Rationalẽ KI, f erit KH, Rationalis ipſi KI, hoc eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Et quia AC, BC,



a 45. pri.
b 7. ſec.
c 24. dec
d 16. dec
e 23. dec
f 23. dec



longitudine incommensurabiles sunt, estque vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, vt ostendimus lemmate 3. ad
a10.dec. propos. 19. huius lib. [a] erit quadratum ex AC, incōmensurabile rectangulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, rectangulum EG. (cum enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata commensu-
b16.dec rabilia. [b] Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est vtrique ipsorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo sub AC, BC, commensurabile est eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipsi KG, incommensurabile est,
c10.dec. ex ijs, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. [c] Rectæ igitur EH, KH, eandem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommensurabiles sunt: Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tātum commensurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commensura-
d74.dec bilis ipsi EH, [d] erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse, & illi cōgruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tan
e80.dec tum congruere, [e] demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

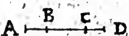
Lxxxij.
Lxxvij.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

MINORI vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum

quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium.

SIT Minor AB,& illi congruens BC,toti AC,potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC,Rationale; at rectangulum ſub AC, BC, Medium. Dico ipſi AB, aliam non congruere, quæ eadē præſtet. Sit enim,



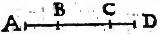
ſi fieri poteſt,alia cōgruens BD,toti AD, potentia incōmenſurabilis, faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AD,BD, Rationale, at rectangulum ſub AD,BD,Medium. Quoniam igitur, vt in propoſ. 80. demonſtratum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD,BD,qui inter rectangulum bis ſub AC, BC,& rectangulum bis ſub AD,BD: Eſt autem exceſſus inter illa compoſita,ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius libri; quod vtrumque Rationale ponatur. Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD,BD,ſpatium eſt Rationale. ſed & non Rationale eſt. (Cum enim rectangulum ſub AC, BC,ponatur Medium,erit quoque ex coroll.propoſ. 24. huius lib.eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC,Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis ſub AD, BD. a Quare vnum non ſuperabit alterum Rationali. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommenſurabilis, &c. Minori ergo vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum. a 27.dec

THEOR. 66. PROPOS. 84. Lxxxiij Lxxviij

EI, quæ cum Rationali Medium totū facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex

ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta B C, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum vero ſub AC, BC, Rationale. Dico ipſi AB, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat.



Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta BD, toti AD, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Medium, rectangulum vero ſub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter cõpoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub AD, BD: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ſpatium Rationale, vt in propoſ. 81. demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale eſt: ſed & non Rationale eſt; cum vtrumque ſit Medium.

a 27. dec. a Medium enim Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdum. Non ergo ipſi AB, alia recta, quam BC, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

Lxxxiv
Lxxix.

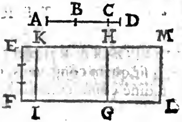
THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis

conti-

continetur Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis.

SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipsi vero congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque & compositum ex quadratis rectarũ AC, BC, Medium, & rectangulum sub AC, BC, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipsi AB, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si n. fieri potest, congruat ipsi recta alia BD,



toti AD, potentia incommensurabilis, ita vt & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, Medium sit, & rectangulum sub AD, BD, Medium quoque, ac incommensurabile composito ex quadratis rectarum AD, BD. Constructis autem ijsdem, quæ in propos. 82. quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium est; erit etiam EG, illi æquale, Medium. [a] Recta igitur EH, Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit & eius duplum KG, Medium. [b] Igitur & recta KH, Rationalis est, longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Et quoniam KG, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cum illud huius sit duplum; at rectangulum sub AC, BC, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC; [c] erit quoque KG, eidem composito, hoc est, ipsi EG, incommensurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, [d] longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles. Quare cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commensurabilis ipsi EH; [e] erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter ostendemus EK, esse Apotomen, & ei congruentem esse KM. Non igitur Apotomæ vna tantum recta

[a] 23. dec
[b] 23. dec
[c] 14. dec
[d] 10. dec
[e] 74. dec

a 80. dec congruit,&c. Quod est absurdum.[a] Vnam enim tantum congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

DEFINITIONES TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI vero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruẽs expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IIII.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI vero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

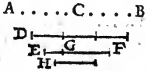
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus est perspicuum.

PROBL. 19. PROPOS. 86. Lxxxv. Lxxx.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus AC, non sit quadratus; ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratũ, at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit EF. Eritque EF, cum commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Dico EG, esse primam Apotomen. a Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, cō- a 6. dec.



mensurabilia sunt; Erunt & rectæ EF,GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo E F, ostensa sit Rationalis,erit & GF, Rationalis. Quia vero AB,AC,proportionem non habẽt,quam quadrati numeri;neque quadrata ex E F, G F, proportionem habebunt,quam quadrati
a9.dec. numeri. a Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF,GF.Rationales ergo sunt EF, GF, potentia tan-
b74.dec tum commensurabiles;b atque idcirco reliqua EG,Apotome est.Dico & primam esse. Possit enim recta EF,plus quã recta GF,quadrato ex H.Et quia est,vt numerus AB, ad numerum AC,ita quadratum ex EF,ad quadratum ex GF; erit per cõuersionem rationis,vt AB,ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratũ ex H.Habent autẽ AB,CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF, &

A ..... C.... B



c9.dec. H, proportionem habent, quam numeri quadrati; c Ac propterea rectæ EF,& H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quam congruens GF,quadrato rectæ H,sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem E F, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit E G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

Lxxxvj
Lxxxj.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, CB, vt in propos. præcedenti; expositaque Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis GF,eritque G F, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico E G, esse secundam Apotomen.

A..... C.... B



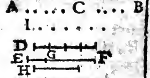
d6.dec. d Quoniam enim quadrata ex GF, EF,proportionem habentia, quam numeri A C, AB, commensurabilia sunt;

Erunt & rectæ GF, EF, commensurabiles, saltē potentia. Cum ergo GF, sit ostensa Rationalis; erit quoque EF, Rationalis. Quia vero numeri AC, AB, atque adeo & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; a erunt GF, EF, longitudine incommēsurabiles. a9.dec. Rationales ergo sunt GF, EF, potentia solum commensurabiles; b Ideoque EG, reliqua, Apotome est. Dico & secūdam esse. Possit enim recta EF, plus quam GF, quadrato b73.de. ex H. Quoniam ergo est vt AC, ad AB, ita quadratum ex GF, quadratum ex EF; & conuertendo, vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF: Ostendemus iam vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi EF, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens GF, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit EG, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

PROBL. 21. PROPOS. 88. Lxxxvij Lxxxxii.

INVENIRE tertiam Apotomen.

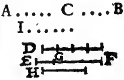
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 86. sumatur alius numerus I, vt in propos. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. c Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numeri I, & AB, commensurabilia, atque adeo & rectæ D, & EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & EF, Rōnalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; d erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat vt AB, ad AC, ita quadra-



c6.dec.

d9.dec.

tum ex E F. ad quadratum ex G F, ex eodem corollario
a 6. dec. propoſ. 6. huius lib. Dico E G, eſſe tertiam Apotomen.
a Quoniam enim quadrata ex E F, proportionem haben-
tia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; erunt



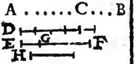
& rectæ EF, GF, commenſurabiles,
ſaltem potẽtia. Cum ergo EF, oſten
ſa ſit Rationalis, erit & G F, Ra-
tionalis, cum illi hæc ſit commen-
ſurabilis, vt demonſtrauimus. Et
quia AB, AC, atque adeo & quadra
ta ex EF, GF, proportionem non ha-
b 9. dec. bent, quam numeri qnadrati; b Erunt rectæ EF, GF, lon-
gitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt EF,
G F, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea,
c 74. dec cum ex EF, auferatur G F, potentia illi ſolum commen-
ſurabilis; c reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam,
eſſe. Quoniam enim eſt vt I, ad A B, ita quadratum ex
D, ad quadratum ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum
ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo vt I, ad A C,
ita quadratum ex D, ad quadratum ex G F: Non habent
autem numeri I, & AC, proportionem, quam numeri
quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF, propor-
d 9. dec. tionem habebunt, quam numeri quadrati. d Sunt ergo
rectæ D, & GF, longitudine incommenſurabiles. Igitur
neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis eſt
expoſitæ Rationali D. Poſſit iam EF, plus quam GF, qua-
drato rectæ H; Oſtendemuſque, vt in propoſ. 86. rectam
H, eſſe ipſi E F, longitudine commenſurabilem. Qua-
propter cum tota E F, plus poſsit quam congruens G F,
quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis,
& neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis
ſit Rationali D, expoſitæ; erit ex defin. EG, tertia A-
potome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod fa
ciendum erat.

Lxxxviij Lxxxiij PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

RE-

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit EF; eritque propterea & EF, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, vt ibi, EG, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim EF,

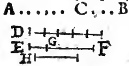


plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota EF, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum. a 9. dec.

PROBL. 23. PROPOS. 90. Lxxxix Lxxxiv

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propos. præcedenti. fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur GF, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus



ergo vt in propos. 87. EG, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Possit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis esse vt AB, ad CB, ita quadratum EF, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propos. antecedenti, rectæ EF, & H, longitudine incommensurabi-

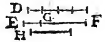
lis;eſtque congruens GF, Rationali D, commenſurabilis longitudine;erit ex defin. EG, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

Lxxxx. PROBL. 24. PROPOS. 91.
Lxxxv. INVENIRE ſextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris A C, C B, & I, vt in propoſ. 54. ita vt AB,ad neutrum ipſorum A C, C B; & I,ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, vt in propoſ. 88. Oſtendemus ergo ſimiliter, vt ibi, D, & E F, longitudine incommenſurabiles eſſe; & E G, Apotomen eſſe.

A . . . . C . . . . . B

I . . . .



Dico & ſextam eſſe. Nam vt in propoſ.88.erunt D, & G F, longitudine quoque incommenſurabiles; Atque adeo neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſſit iam E F, plus quam GF,quadrato rectæ H, quam oſtendemus, vt in propoſ. 89. longitudine incommenſurabilem eſſe ipſi E F. Igitur cum tota E F, plus poſſit, quam congruens G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis,& neutra ipſarum EF, GF,longitudine ſit commenſurabilis Rationali D; erit ex defin. EG, ſexta Apotome. Inuenimus ergo ſextã Apotomen.Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

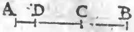
SED & expeditius ſex dictas Apotomas inueniemus hac ratione,vt Theon docet hoc loco.

a49:dec *SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome.* [a] *Reperiatur prius ex binis nominibus prima A B, cuius maius nomen AC,& minus CB. Abſciſſa igitur ex AC,recta C D, quæ æqualis ſit ipſi CB: Dico A D, eſſe primam Apotomen. Quoniam enim AC, CB, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; erunt etiam AC, DC, Rationales potentia tantum commenſurabiles.* [b] *Eſt ergo A D, Apotome. Et*

b74.dec

quia

quia AC, plus poteſt, quam CB, hoc eſt, quam DC, quadrato rectæ lineæ ſibi lõgitudine commenſurabilis: & eſt A C,

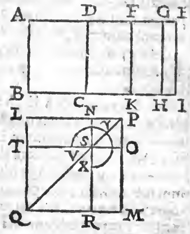


Rationali expoſitæ longitudine commenſurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ, AD, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex ſecunda ſecundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex ſexta ſextam, ſi minora nomina ex maioribus auferamus.

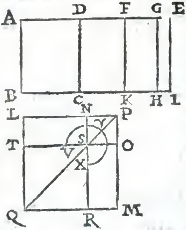
THEOR. 68. PROPOS. 92. Lxxxxi Lxxxvi

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea ſpatium potens Apotome eſt.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Apotomen eſſe. Sit ipſi A D, congruens D E. Erunt igitur A E, D E, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; & tota AE, longitudine commenſurabilis Rationali A B; & denique eadem A E, tota plus poterit, quam congruens D E, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex F E, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad A E, rectangulum æquale ſub A G, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. Et quia A E, plus poteſt, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis:



erunt



a18.dec b16.dec [a] erunt rectæ AG,GE,longitudine commensurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti AE,longitudine commensurabilis erit:Est autem A E, Rationali AB,longitudine commensurabili s.[c] Igitur & vtraque AG,GE, ipsi AB,longitudine est commensurabilis;atque ex definitione 6.Rationalis.Quare ductis G H, EI,ipsi AB,parallelis, quæ ipsi B C, productæ occurrant in H,I,[d] erit vtrumque rectangulum AH, GI,contentum sub duabus rationalibus longitudine commẽsurabilibus,Rationale. Rursus quia vtraque DF,FE, longitudine commensurabilis est ipsi DE; & DE, longitudine incommensurabilis est Rationali A B; (Nam si commensurabilis esset longitudine,cum & A E, sit eidem AB,longitudine commensurabilis;[e] essent AE, DE,lõgitudine quoque cõmensurabiles.Quod est absurdum.ponuntur enim solum potentia commensurabiles:) [f] erit etiam vtraque ipsarum DE,FE,ipsi AB,longitudine incommensurabilis Et quoniam vtraque D F, F E, Rationali DE,commensurabilis,Rationalis est; Erunt propterea tam AB,DF,quam A B, F E, Rationales potentia tantum commensurabiles.Quare ducta FK,ipsi A B, parallela,[g] erit vtrumque rectangulum DK,FI,contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.

(margin: c12.dec; d20.dec; e12.dec; f14.dec; g22.dec)

I A M vero ipsi A H, [h] fiat quadratum æquale L M, & ipsi GI, æquale fiat quadratum N O, communem habens cum L M, angulum L P M. [i] Erunt igitur quadrata LM,NO,circa eandem diametrum,quæ sit P Q. Perficiatur autem figura, vt vides.Quoniam igitur rectangulum sub AG,GE, per constructionem,æquale est quadrato ex FE: [K] erunt tres rectæ AG, FE, G E, proportionales;[l] Ac propterea cum AH,FI,GI, eandem cum ipsis habeant

(margin: h14.sec; i26.sex; K17.sex; l1.sexti)

beant ratione; erit FI, medium proportionale inter AH GI, hoc est, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Est autem inter eadem LM, NO, per lemma propos. 14. huius lib. medium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia sunt: [a] Sed ipsi FI, æquale est DK, & ipsi LO, æquale est MN. Est ergo totum DI, toti gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Est autem & totum AI, per constructionem, æquale quadratis LM, NO, Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, est æquale; Ac propterea recta TS, potest spatium AC, Dico TS, Apotomen esse. — a 36. dec

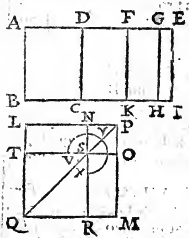
QVONIAM enim spatia AH, GI, ostensa sunt Rationalia; & eis æqualia sunt LM, NO, erunt quoque quadrata LM, NO, Rationalia, atque adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rursus quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, illi æquale, Medium. Incommensurabilia ergo sunt LO, & NO, cum vnum sit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO, [b] eandem rationē habentes cum LO, NO, [c] longitudine incommensurabiles sunt; [d] Atque idcirco reliqua TS, Apotome est. Si spatium ergo cōtineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat. — b 1. sexti c 10. dec d 74. dec

THEOR. 69. PROPOS. 93.

Lxxxxii. Lxxxvii.

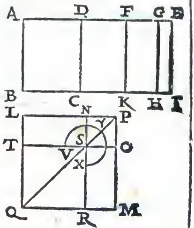
SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma secunda AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, Mediæ Apotomen esse primam. Sit ipsi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ secundæ, Rationales potentia tantum commensurabiles; & congruens DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F. & reliqua omnia



a18.dec cõſtruantur, vt in propoſitione præcedenti. a Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſitione, A G, G E,
b16.dec longitudine commenſurabiles; b Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine cõmenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali A B, longitudine, incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi A B, longitudine; cum D E, eidem A B, ponatur longitudine commenſurabi-
c12.dec lis; c eſſent A E, D E, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim potentia tantum commenſurabiles.) d Igitur & vtraque ipſa-
d14.dec rum A G, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidem A B. Eſt autem vtraque A G, GE, Rationali A B, commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam AB, AG, quam A B, G E, potentia ſolum commenſurabiles;
e22.dec e Atque idcirco rectangulum vtrumque AH, GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque DF, FE, ipſi D E, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur DE, Rationali A B, longitudine commenſurabilis; erit quoque, vt in ſcholio propoſitionis 12. huius lib. oſtendimus, eidem AB, Rationali longitudine commenſurabilis vtra-
f20.dec que DF, FE; atque adeo & Rationalis. f Vtrumque ergo rectangulum DK, FI; contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale eſt. Iam vero, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen eſſe primam.

QVONIAM enim AG, GE, longitudine ſunt com-
g10.dec menſurabiles, g erunt & A H, GI, eandem cum illis habentia rationem, commenſurabilia; atque adeo & L M, NO, quadrata illis æqualia, commenſurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO, SO, ſaltem poten



tia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Medijs AH, GI, æqualia, (ostensa.n. sũt AH, GI, Media esse) Media sint. Et quoniã FI, atque adeo sibi æquale LO, Rōnale est, propter eaque Medio NO, incōmensurabilea; erũt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incommensurabiles. Cum ergo & Mediæ sint ostensæ, & cōmensurabiles; erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commensurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale est ostensum; [b] erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat.

a 10. dec

b 75. dec

THEOR. 70. PROPOS. 94.

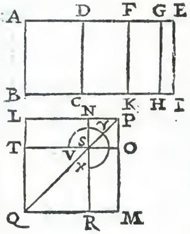
Lxxxxiii
Lxxxviii

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, esse MedIæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, AG, GE, longitudine inter se commensurabiles; [c] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commensurabilis erit. Est autem AE, posita incommensurabilis longitudine Rationali AB. [d] Igitur & vtra-

c 16. dec

d 14. dec



que AG,GE,eidem AB,longitudine erit incommenſurabilis. Cum ergo vtraque AG,GE,Rationali AE, commenſurabilis,Rationalis ſit; erunt tam AB,AG, quã AB, GE,Rationales potentia ſolum commenſurabiles;a Ac propterea vtrumque rectangulum AH,GI, Mediũ erit. Rurſus quia DE, longitudine ponitur incommenſurabilis RationaliAB;erit quoque vtraq; DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabi lis exiſtens,b eidem AB,longitudine incommenſurabilis. Cum ergo vtraque DF,FE,Rationali DE,commenſurabilis,ſit Rationalis ; erunt tam AB,DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commenſurabiles; c atque propterea vtrumque rectangulum DK, F I, Medium erit. Similiter iam demonſtrabimus,vt in propoſ.92.rectam TS,poſſe ſpatium AC.Dico TS, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam.

a22.dec
b14.dec
c22.dec

QVONIAM enim AH,GI,Media ſunt oſtenſa; erunt & quadrata LM,NO,illis æqualia , Media; Ac propterea & rectæ TO,SO,Mediæ.Et quia AH,GI,eandem habentia rationem,quam AG,GE, quas oſtendimus commenſurabiles eſſe,d commenſurabilia ſunt;Erunt & quadrata LM,NO,commenſurabilia.Igitur & rectæ TO,SO,commenſurabiles ſunt,ſaltem potentia.At vero quia AE,DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles, hoc eſt,longitudine incommenſurabiles,eſtque ipſi AE, longitudine oſtenſa commenſurabilis GE, ipſi vero DE , commenſurabilis eſt longitudine FE;erunt ex ſcholio propoſ.14.huius lib. & G E , FE , longitudine incommenſurabiles ; e ac propterea G I , F I, eandem rationem habentia , quam G E, FE,hoc eſt, illis æqualia NO.LO, incommenſurabilia. Quare T O, S O, eandem rationem habentes,quam LO,

d10.dec
e10.dec

NO,

NO, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commẽsurabiles. Mediæ ergo sunt TO, SO, potentia solum commensurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale sit ipsi FI, vt constat ex propos. 92. quod Medium esse ostendimus; erit & LO, Medium.) [a] erit TS, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum. [a] 76. dec

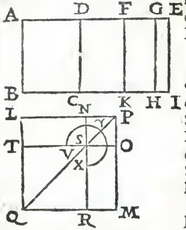
THEOR. 71. PROPOS. 95.

xciiij.
Lxxxix

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Minorem esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Rationales potentia solum commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, lõgitudine commensurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. [b] Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem A E, plus potest, quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulum sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; [c] erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Rationali A B, longitudine incommensurabilis, [d] erit DI, atque adeo & eius dimidium F I, Medium. Amplius cum A G, G E, sint longitudine incommensurabiles; [e] incommensurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero similiter demon-

[b] 19. dec
[c] 20. dec
[d] 22. dec
[e] 10. dec



ſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe Minorem.

QVONIAM enim ex conſtructione, rectangulo AI, æquale eſt compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Eſt autem illud oſtenſum Rationale; erit & compoſitũ ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Item quia FI, Medium eſt oſtenſum, erit & LO, contentum ſub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incommenſurabilia ſunt demonſtrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommenſurabilia; Atque adeo rectæ TO, SO, potentia incommenſurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia ſint incommenſurabiles, ſitque compoſitum ex quadratis ipſarum, Rationale: rectangulum vero ſub ipſis, Medium; a erit reliqua TS, Minor. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 77. dec.

Lxxxxv.
Lxxxx.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, (repetita figura proxime antecedentis propoſitionis) ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD, Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantũ

com-

commensurabiles,& DE,Rationali AB,commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit,quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis.Secetur DE,bifariam in F, & reliqua construantur, vt prius. Erunt ergo rursus,vt in antecedenti propos.AG,GE,longitudine incommensurabiles.Et quia AE, Rationalis longitudine incommensurabilis est Rationali AB,vt in propos.93.diximus; [a] erit rectangulum A I, Medium. Item quia DE,Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; [b] erit DI, atque idcirco & eius dimidium FI,Rationale.Rursus erunt, vt in præcedenti propos.AH,GI,incommensurabilia;poteritque,vt ostensum est in propos.92.recta TS,spatiũ A C.Dico T S,esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. a 22.dec b 20.dec

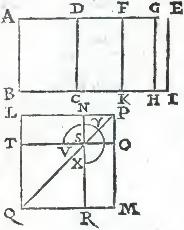
QVONIAM enim ostensum est AI,Medium esse; erit & compositum exquadratis LM,NO rectarum TO, SO, illi æquale,Medium.Item quia demonstrauimus FI, Rationale esse;erit & LO,rectangulum sub TO,SO,contentum,cum illi sit æquale, Rationale.Sunt autẽ & TO, SO, potentia incommensurabiles, vt in propos. antecedenti est demonstratum.Igitur cum TO, SO, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium;rectangulum vero sub ipsis,Rationale; [c] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta,&c. Quod erat demonstrandum. c 78.dec

THEOR. 73. PROPOS. 97.

Lxxxxvi
Lxxxxi.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali AB, & Apotoma sexta A D. Dico rectam, quæ potest



ſpatium AC,eſſe eam,quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit enim ipſi AD,congruens DE.Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles,& neutra ipſarum AE, DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine;Et denique AE, plus poterit, quā DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt ſupra. Erunt ergo rurſus vt in propoſ. 95. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia tam AE,quam DE,Rationalis eſt,& Rationali AB,longitudine incommenſurabilis;[a] erit tam AI,quam DI, atque adeo & huius dimidium FI.Medium.Eruntque vt in propoſ.95. AH,GI,incommenſurabilia.Et quoniam AE,DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles;[b] Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommenſurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commenſurabilia ſint, [c] erit FI, ipſi AI, incommenſurabile. Iam vero demonſtrabimus,vt in propoſ 92.rectam TS,poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

a 22.dec
b 10.dec
c 14.dec

QVONIAM enim AI,Medium oſtendimus;erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale,Medium.Item quia FI, Medium oſtenſum eſt; erit & LO,illi æquale,contentumque ſub TO, SO, Medium.Rurſus quoniam FI,ipſi AI, eſt incommenſurabile,vt oſtendimus;erit quoque LO, ſub TO, SO, contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum TO,SO;propterea quod LO,ipſi FI,& compoſitum ex quadratis rectarum TO,SO,ipſi AI,eſt æquale. Deni-

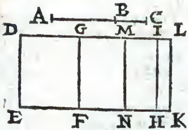
que

que TO,SO, potentia incommensurabiles sunt, vt in propos. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO, SO, sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarũ quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc composito ex quadratis ipsarum incommensurabile; [a] erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum. [a] 79. dec

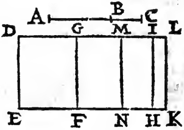
THEOR. 74. PROPOS. 98. xcvij. xcij.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; [b] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse Apotomen primam. Ad eandem enim DE, applicetur rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt totum DK, æquale sit cõposito ex quadratis rectarum AC, BC. [b] 45. pri



[c] Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; si auferantur quadratum ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectangulo bis sub AC, BC, æquale; atque adeo diuisa GL, bifariam in M, ductaque MN, ipsi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo sub AC, BC. Et quoniam AC, BC, Rõnales sunt; erũt quoq; quadrata ex AC, BC, Rõnalia; ideoque cõmensurabilia. [d] Cũ ergo & cõpositum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipsorum sit cõmensurabile, [c] 7. sec. [d] 16. dec



erit & illud compositum, hoc est, illi ęquale DK, Rationale: Quod cum applicetur ad Rationalem DE,[a] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commēsurabilis. Rursus quia AC, BC, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectāgulum sub ipsis, atque adeo & eius duplū GK, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem GF; [b] erit GL, Rationalis ipsi GF, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quoniā DK, Rationale, & GK, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt; [c] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commensurabiles; [d] Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam esse.

a 21. dec
b 23. dec
c 10 dec
d 74. dec

QVONIAM enim per Lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC, BC, hoc est, MK, medium est proportionale inter quadrata rectarum AC, BC, hoc est, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK. continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt. [e] Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex ML, hoc est, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc est, illis æqualia DH, IK, commensurabilia sunt, [f] erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum duæ rectæ D L, G L, inæquales sint, & ad maiorem DL, applicatum rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiensque figura quadrata; atque sit ostensa DI, ipsi IL, longitudine commensurabilis; [g] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensum DG, esse Apotomen, & totam DL, plus pos-

e 17. sex.
f 10. dec
g 18. dec

ſe,quam GL,congruentem,quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis,atque eandem totam commenſurabilem eſſe lõgitudine Rationali DE;erit ex defin. DG,Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum,latitudinem facit Apotomen primam.Quod oſtendendum erat.

THEOR. 75. PROPOS. 99. xcviij. Lxxxxiii

QADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalẽ applicatum latitudinem facit Apotomen ſecundam.

SIT Mediæ Apotome prima A B, & ipſi congruens BC,ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles,contineantque Rationale: [a] Et ad Rationalem DE,quadrato ex A B, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG.Dico DG, Apotomen ſecundam eſſe.Conſtruantur enim eadem, quæ in antecedenti propoſ.ita vt rurſus D H, I K, æqualia ſint quadratis ex AC, B C; & G K, æquale ei, quod ſub A C, BC, bis continetur; ac proinde M K, ei, quod ſub A C, B C, continetur ſemel.Quoniam igitur AC,BC,Mediæ ſunt potentia commenſurabiles;erunt & earum quadrata, hoc eſt, illis æqualia,DH,IK,Media,& commẽſurabilia;[b] ac proinde & totum DK, vtrique illorum commẽſurabile erit. Igitur & Medium,per coroll.propoſ.24.huius libri.Cum ergo DK, applicetur ad Rationalem DE, [c] erit D L, Rationalis ipſi DE,longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulũ ſub AC,BC,Rationale ponitur,erit quoque eius duplum G K, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem D E, [d] erit GL, Rationalis longitudine commenſurabilis ipſi DE.Quia vero DK,Medium,id eſt, Irrationale,& GK,Rõnale, incõmenſurabilia ſunt;[e] erũt rectæ DL,GL,eandem habẽtes cum illis rationem longitudine incommenſurabiles. Cum ergo Rationales ſint oſtenſæ,erunt DL,GL,Rationales potentia tantum com-

a 45.pri
b 16.dec
c 23.dec
d 21.dec
e 10.dec

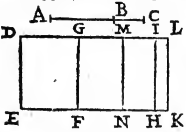
a74.dec mensurabiles;a Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & secundā esse. Nam similiter, vt in pręcedēti propos. demonstrabimus totam D L, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum congruens G L, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. D G, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.

Lxxxxix
xciiii.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secunda A B, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia tantum commen-
b45.pri surabiles, contineantque Medium: b Et ad Rationalem DE, Applicetur D F, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico D G, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Ostendemus iā, vt in propos. pręcedenti, DK, Medium esse,
c23.dec c atque adeo rectam DL, Rationalem ipsi DE, lōgitudine incommensurabilem. Et



quia rectangulum sub AC, BC, Medium est, atque ob id
d23.dec & eius duplum G K, d erit quoque GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Quia vero AC, BC, longitudine sunt incommensurabiles, estque vt A C, ad BC, ita per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex
e10.dec AC, ad rectangulum sub A C, B C, e erit quadratum ex
f16.dec. A C, incommensurabile rectangulo sub A C, B C. f Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis rectarum A C, B C; quod quadrata ex rectis A C, B C, potentia commensurabilibus descripta,

com-

commensurabilia sint; rectangulo vero sub A C, B C, commensurabile est rectangulum bis sub AC, BC. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, DK, incommensurabile est rectangulo bis sub AC, BC, hoc est, ipsi GK, a Atque adeo rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt D L, GL, potentia solum commensurabiles; b Ac proinde reliqua D G, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, vt in propos. 98. demonstrabimus D L, totam plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo neutra ipsarum DL, GL, Rationali DE, longitudine sit commensurabilis, vt demonstratum est; erit ex defin. D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum. a 10. dec. b 74. dec.

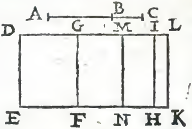
THEOR. 77. PROPOS. 101.

C. LXXXXVI.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT minor A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, BC, potentia incommensurabiles sint, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum vero sub AC, BC, Medium: c & ad Rationalem DE, applicetur spatium D F, quadrato ex A B, æquale latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale D K, Rationale est; d erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub A C, BC, atque adeo & eius duplum G L, Medium est; e erit G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam c 45. pri. d 21. dec. e 23. dec.

niam



niam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Mediũ incommensurabilia sunt; a erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incõmensurabiles. Ostẽsæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt

a 10. dec.

b 74. dec

DL, GL, potentia tantum commensurabiles; b Ac propterea reliqua DG. Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim A C, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis ęqualia, DH, IK, incommensurabilia; c Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub D I, I L, æquale sit quadrato ex M L, id est, quartæ parti quadrati ex G L, vt in propos. 98. est demonstratum; d poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad D L, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore deficiens figura quadrata, diuidensque maiorem D L, in partes DI, I L, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit quam congruẽs G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

c 10. dec

d 19. dec

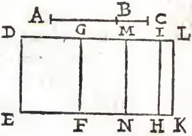
THEOR. 78. PROPOS. 102.

CI. Lxxxxvi

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem aplicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB,& ipsi congruens BC, ita vt A C, B C, potentia sint incommensurabiles,faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC,BC, Medium; rectangulum vero sub iisdem AC,BC,Rationale:[a] Et ad Rationalē DE, applicetur DF,æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens D G, Dico D G, Apotomen quintam esse. Construantur enim eadem,quæ supra.Quoniā igitur compositū ex quadratis rectarum A C, B C, atqueadeo & illi æquale D K, Medium est; [b] erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, B C, atque adeo & eius duplum G K, Rationale est; [c] erit G L, Rationalis ipsi DE,longitudine commensurabilis. Et quia DK,Medium seu Irrationale,& GK, Rationale, incommensurabilia sunt:[d] erunt DL, GL,eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ.Rationales ergo sunt DL,GL,potentia solum commensurabiles; [e] Atque idcirco reliqua DG,Apotome est.Dico & quintam esse.Eodem enim modo,vt in antecedenti propos. demonstrabimus D L, totam plus posse quam G L, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens G L, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE,erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius,quę cum Rationali Medium totum efficit, &c.Quod demonstrandum erat.



a 45.pri

b 23.dec

c 21.dec

d 10.dec

e 74.dec

THEOR. 79. PROPOS. 103.

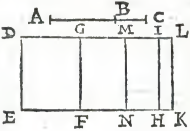
Cii. Lxxxxvii

QVADRATVM eius, quæ cū Medio Medium totum efficit,ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, potentia sint incommensurabiles, faciantque & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub iisdem A C, B C, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum.

245.pri. [a] Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato ex A B, spatium æquale D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Quoniam igitur tam compositū ex quadratis rectarum A C, B C,



b23.dec hoc est, illi æquale D K, quam rectangulum sub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium est; [b] Erit tam D L, quam G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub A C, B C, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A C, B C; Et sunt rectangulum sub A C, B C, & eius duplum

c14.dec G K, commensurabilia; [c] Erit & G K, eidem composito

d10.dec hoc est, ipsi D K, incommensurabile; [d] proptereaque rectę D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia so

e74.dec lum commensurabiles; [e] Atque idcirco reliqua D G, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter. vt propos. 101. totam D L, plus posse, quam congruentem G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum D L, G L, commensurabilis sit longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

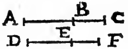
Ciii. xcviii.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

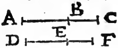
RECTA linea Apotomæ longitudin

commenſurabilis; & ipſa Apotome eſt, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipſi congruens BC, ita vt A C, B C, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Sit autem ipſi A B, longitudine commenſurabilis D E. Dico & D E, Apotomen eſſe, atque ordine eandem ipſi A B; a Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. b Erit ergo tota A C, ad totam D F, vt A B, ad DE, uel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commenſurabiles; c Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commenſurabiles longitudine. Et quia AC, BC, ſunt Rationales, erunt etiam illis commenſurabiles DF, EF, Rōnales. Rurſus quia eſt, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad E F; & ſunt AC, BC, potentia ſolum commenſurabiles; erunt quoque ex iis, quæ ad propoſ. 10. huius libri demonſtrauimus, DF, EF, potentia tantum commenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint oſtenſæ, d reliqua DE, Apotome eſt. Dico & ipſi AB, ordine eandem eſſe. Poſſit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quo poſito, e poterit & D F, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Si igitur A C, longitudine ſit commenſurabilis Rationali expoſitæ, vt AB, ſit Apotome prima; f erit quoque D F, longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ, cum tam Rationalis expoſita, quam D F, eidem A C, ſit longitudine commenſurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadē ipſi AB. Si vero BC, ſit longitudine commenſurabilis Rationali; erit eodem modo E F, Rationali longitudine commenſurabilis; Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome ſecunda. Si denique neutra ipſarum A C, B C, commenſurabilis ſit longitudine expoſitæ Rationali; g erit quoque neutra ipſarum D F, E F, eidem Rationali longitu-



a 12. ſex.
b 12. qn.
c 10. dec.
d 74. dec.
e 15. dec.
f 12. dec.
g 14. dec.



gitudine commenſurabilis. Quar vtraque AB,DE, ex defin erit Ap tome tertia.

POSSIT iam AC,plus quan
a 15.dec BC,quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis Quo poſito, a poterit & DF,plus EF, quadrato rectæ ſib longitudine incommenſurabilis. Quare vt prius, oſten demus D E, eſſe Apotomen quartam, quintam, vel ſex tam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine com menſurabilis, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propoſ.67 huius lib. de lineis ex binis nominibus ſcripſimus. Nimirum ſi recta DE, commenſurabilis ſit ipſi A B, potentia tantum eodem modo demonſtrari poſſe, (ſi loco vocis: longitudine cō menſurabilis; vtamur uoce: potentia tantum commenſura bilis:) & DE, Apotomen eſſe: At non poſſe inferri, illam eſ ordine eandem ipſi AB. Non enim ſequitur, ſi tota AC, lon gitudine ſit commenſurabilis Rationali expoſita, & DF, ei dem eſſe commenſurabilem longitudine, propterea quod no vtraque, nempe Rationalis expoſita, & DF, eidem AC, lon gitudine commenſurabilis eſt; ſed Rationalis quidem com menſurabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum e hypotheſi. Immo vero, ſi A B, ſit Apotome prima, ſecund quarta, vel quinta, fieri nullo modo poteſt, vt DE, illi p tentia tantum commenſurabilis, ſit Apotomen eadem o dine.

SIT enim AB, prima Apotome, ſecunda, quarta vel qui ta, eique congruens BC, & ſit DE, ipſi AB, potentia tantu commenſurabilis, quam quidem, vt in theoremate, oſtend mus Apotomen eſſe, eique congruentem EF, & partes A BC, ad partes D E, E F, eandem proportionem habere cu totis AC, DF, Dico nulla ratione DE, Apotomen eſſe ord eandem ipſi AB. Nam ſi fieri poteſt, ſit vtraque Apoto prima. Quo poſito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex finitione Apotomæ primæ, Rationali expoſita commenſu

bilis

bilis longitudine: atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt AC, & DF. Quare cum sit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; b erunt quoque AB, & DE, longitudine cõmensurabiles. Quod est absurdum. ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE; Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim vtraque congruens BC, EF, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali exposita, atque adeo & ipsa inter se. Quocirca & AB, DE, inter se longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur. a 12. dec b 10. dec

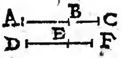
SEMPER tamen verum est, si AB, est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, quæ ipsi AB, potentia solum est commensurabilis, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, c poterit quoque DF, plus quam EF, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; erit quoque DE, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, quãuis ordine non eadem ipsi AB: quia rursus, cum sit vt AC, ad BC, ita DE, ad EF, d poterit quoque DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta. c 15. dec d 15. dec

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105. Ciiii. Lxxxxix

RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est. atque ordine eadem.

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB, eique congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles: Sit autem ipsi AB, commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Mediæ Apotomen esse, & ipsi AB, ordine eandem.



12.sex a Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF, b Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; c erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodem modo commensurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ sunt, d erunt quoque DF, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus, quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autem AC, BC, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex scholio propos. 10. huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ sint ostensæ, e erit reliqua DE, Mediæ Apotome. Dico & eandem esse ordine ipsi AB. Quoniã enim est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum sub DF, EF. Igitur cum quadratum ex AC, commensurabile sit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles; f erit & rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, commensurabile. Quare si rectangulum sub AC, BC, sit Rationale, ita vt AB, sit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub DF, EF, Rationale, cum illi sit commensurabile; g atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita vt AB, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoque rectan-

Margin notes: b 12. qn; c 10. dec; d 24. dec; e 75. vel 76. dec.; f 10 dec; g 75. dec

gulum

gulum sub DF, EF, ei commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. [a] Ac propterea & DE, Mediæ Apotome secunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum. a 76. dec

THEOR. 82. PROPOS. 106. Cv.Cxvi C.

RECTA linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est;

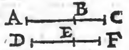
SIT Minor AB, ipsique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulũ vero sub iisdẽ AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Minorem esse. Fiat enim eadem quæ supra. ita vt rursus AB, BC, ad DE, EF, eandem habeant rationem, quam AC, ad DF. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. DF, EF, ipsis AC, BC, commensurabiles siue longitudine & potẽtia, siue potentia tantum. Et quoniã est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutãdo vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [b] erit vt quadratũ ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex EF, & componendo vt compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF: & permutado vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratũ ex BC, ad quadratum ex EF. Est autem quadratum ex BC, commensurabile quadrato ex EF; quod rectas BC, EF, ostenderimus commensurabiles esse. [c] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, composito ex quadratis rectarum DF, EF, commensurabile est, Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypothesi, Rationale. Igitur, & compositum ex quadratis rectarum DF, EF. ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. de- b 22. sex c 10. dec

monſtrabimus rectangulum ſub AC,BC, rectangulo ſub DF,EF,eſſe commenſurabile:ponitur autem rectangulum ſub AC,BC,Medium: Erit quoque rectangulum ſub DF, EF,ex coroll.propoſ.24.huius lib.Medium. Et quia eſt vt AC,ad BC,ita DF,ad EF,ſuntque A C, BC, potentia in-
a 10.dec commenſurabiles; a erunt etiam DF,EF,potentia incommenſurabiles.Quam ob rem cum D F, E F, potentiā ſint incommenſurabiles,faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum DF,EF,Rationale, rectāgulum vero
b 77.dec ſub iiſdem DF,EF,Medium; b erit DE,Minor.Recta ergo linea Minori commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

CviCxvii Ci. PROBL. 83 PROPOS. 107.

RECTA linea commenſurabilis ei,quę cum Rationali Medium totum efficit; & ipſa cum Rationali Medium totum efficiens eſt.

SIT recta AB,cum Rationali Medium totum efficiēs; & ipſi congruens BC,ita vt AC,BC, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC,BC,Mediū;at rectangulum ſub AC, BC,Rationale:Sit autem D E, ipſi AB, commenſurabilis quocunque modo.Dico & DE, eſſe, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra,oſtendemus,vt in antecedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, commenſurabile eſſe compo-



ſito ex quadratis rectarum DF,EF.Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll.propoſ. 24. huius lib. Medium.Rurſus vt in propoſ. 105. demonſtrabimus rectangulum ſub AC,BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub D F, E F. Cum ergo illud Rationale ponatur,erit & hoc Rationale,ex defin.9. Sunt denique eodem modo, vt in pręcedenti propoſ.eſt probatum,rectæ DF, EF.poten-

tia incommensurabiles. Igitur cum DF, EF, incommensurabiles sint potentia, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum vero sub ipsis, Rationale; [a] erit DE; quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat. a 78. dec

THEOR. 84. PROPOS. 108. Cvii. Cii.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

SIT recta AB, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoq; & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem DE, ipsi AB, quomodolibet commensurabilis. Dico & DE, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, probabimus similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommensurabiles. Postremo quia composito ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum est; & rectangulo sub AC, BC, commensurabile rectangulum sub DF, EF; Sunt autem compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC, per hypotesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scho-

lio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, EF, & rectangulū sub DF, EF, incommensurabilia. Quocirca cum D F, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; a erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

a 79. dec

Cviii. ciii.

THEOR. 85. PROPOS. 109.

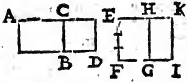
MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR à Rationali A D, Medium CD. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum A B, esse vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis EF, b ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipsi C D, ita vt totum EI, toti A D, sit æquale. Quoniam igitur E I, æquale Rationali A D, Rationale est; c erit E K, Rationalis, Rationali E F, longitudine commensurabilis. Rursus quia H I, Medio C D, æquale Medium est, d erit H K, Rationalis, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Itaque cum E K, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi E F, at H K, eidem E F, longitudine incommensurabilis, e erunt E K, H K, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles: f proptereaque reliqua EH, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K,

b 45. pri.

c 21. dec

d 23. dec



e 13. dec

f 74. dec

p lus

plus poteſt quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt E K. quam HK. quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine; cum tota EK, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome prima Quare recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc eſt, ſpatiũ AB, ſibi æquale,[a] Apotome eſt. Si vero E K, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; cũ tota EK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quarta E H, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, [b] Minor eſt. Medio ergo a Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

a 92. dec
b 95. dec

THEOR. 86. PROPOS. 110.

cix.
Ciiii.

RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, que reliquum ſpatium AB, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cnm Rationali Mediũ totũ effiicit. Eadem.n. conſtruãtur, quæ ſupra. Et quia EI, Medio AD, æquale, Medium eſt; [c] erit EK, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale eſt; [d] erit HK, Rationalis ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Itaque cum HK, quidẽ ipſi EF, ſit commenſurabilis longitudine, at EK, eidẽ EF, longitudine incommenſurabilis; [e] erũt H K, EK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles; [f] Ac proinde reliqua E H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut

c 23. dec
d 21. dec
e 13. dec
f 74. dec

igitur EK, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si EK, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum congruens H k, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome ſecūda. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſecunda EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, [a] Mediæ eſt Apotome prima. Si vero EK, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum congruens H K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit E H, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma quinta EH, hoc eſt, ſpatium illi æquale A B, [b] eſt ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quam ob rem Rationali a Medio detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

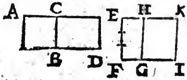
a 93. dec
b 96. dec

Cx.
Cv.

THEOR. 87. PROPOS. 111.

MEDIO a Medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome ſecunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio A D, Medium C D, quod incommenſurabile ſit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium AB, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen ſecundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdē quæ ſupra; quoniam E I, HI, Mediis A D, CD, æqualia Media ſunt, [c] erunt E K, H K,



c 23. dec

Ra-

Rationales ipsi E F, longitudine incommensurabiles. Et quia AD, CD, hoc est, EI, HI, ponuntur incommensurabilia;[a] erunt EK, HK, eandem cum illis habentes ratione, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; [b] Ac propterea reliqua FH, Apotome est, & ei congrues HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, longitudine commensurabilis sit ostensa; erit ex defin. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc est, spatium AB, illi æquale; [c] Mediæ Apotome est secunda. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, sit longitudine commensurabilis, vt demonstrauimus; erit ex defin. EH, Apotome sexta. Quam ob rem recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma sexta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, [d] est ea, quæ cum Medio Mediū totum efficit. Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

a 10. dec
b 74. dec
c 94. dec
d 97. dec

THEOR. 88. PROPOS. 112.

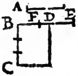
Cxj. Cvj.

APOTOME non est eadem, quæ ex binis nominibus.



SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si fieri potest, A, aliqua ex binis nominibus. Exposita autem Rationali BC, [e] applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale quadrato ex A. Quoniam igitur A, Apotome est; [f] erit latitudo BD, Apotome prima. Sit ergo ei con-

e 45. pri
f 98. dec.



congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ B E, D E. Rationales potentia tantum commensurabiles, poteritque BE, plus quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & ipsa BE, Rationali BC, commensurabilis erit longitudine. Rursus quia A,
a61.dec ponitur esse quoque ex binis nominibus; [a] erit latitudo eadem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipsius nomen BF. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima est, BF, FD, Rationales potentia solum cõmensurabiles, poteritque BF, plus quam FD, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa BF, Rationali BC, longitudine commensurabilis erit. Itaque cum tam BE, quam BF, longitudine sit commensurabilis eidẽ
b12.dec B C; [b] erunt quoque B E, B F, inter se commensurabiles longitudine. Igitur cum tota BE, sit longitudine commensurabilis parti BF, erit & eadem BE, reliquæ parti FE, longitudine commensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeo cum BE, Rationalis sit, & FE, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum B E, FE, longitudine commensurabilium, ipsa BE, longitudine incommensurabilis est ipsi DE; (quod BE, DE, Rationales sint potẽ-
c14.dec tia solum commensurabiles) [c] erit quoque altera FE, eidem DE, incommensurabilis longitudine. Sed & vtraque FE, DE, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt FE, DE, potentia solum commensurabiles. Quare reliqua
d74.dec FD, [d] Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

EX demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

e23.dec QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatũ, [e] latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incom-
f98.dec mensurabilem.

A T quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, [f] latitudi

nem

nem efficit Apotomen primam.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatum, a latitudinem efficit Apotomen secundam.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ secundę ad Rationalem applicatum, b latitudinem efficit Apotomen tertiam. a 99. dec

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, c latitudinem efficit Apotomen quartam. b 110. dec

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, d latitudinem efficit Apotomen quintam. c 101. dec d 102. dec

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, e latitudinem efficit Apotomen sextam. e 103. decimi.

ITAQVE cum hę latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eædem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & à Media, & inter se se differre.

QVONIAM vero in hoc theoremate demõstrauimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiũt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiũt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quapiam exposita, tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hactenus disputauimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis secunda.
5. Maior.

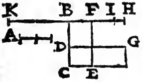
6. Ra-

6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima:
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

Cxii. o.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.



SIT Rationalis A, & ex binis nominibus BC, cuius maius nomẽ BD;[a] & ad BC, applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BF. Dico BF, eſſe Apotomen, cuius nomina

245. pri

hoc

hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc Apotomen BF, esse ordine eandem ipsi BC, ex binis nominibus. [a] Applicetur enim rursus ad DC, minus nomen, rectangulum CG, æquale eidem quadrato ex A, atque adeo rectangulo BE, latitudinem faciens DG; sitque ipsi DG, æqualis BH. Et quoniam æqualia sunt BE, CG; [b] erit vt BC, ad DC, ita DG, hoc est, sibi æqualis BH, ad BF. Et diuidendo vt BD, ad DC, ita HF, ad FB: Est autem BD, maior, quam DC. Igitur & HF, maior est, quam FB. Ponatur FI, ipsi FB, æqualis; [c] & fiat vt HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo vt HF, ad IF, hoc est, ad sibi æqualem BF, ita FK, ad BK. Ostensum est autem esse vt HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque vt BD, ad DC, ita FK, ab BK. At BD, DC, (cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum commensurabiles. [d] Igitur & FK, BK, potentia solum commensurabiles sunt.

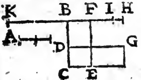
a 45. pri
b 14. vel 16. sex.
c 12. sex
d 10. decimi.

RVRSVS quia est vt HF, ad BF, ita FK, ad BK, [e] erunt quoque HF, FK, antecedentes simul, nempe tota HK, ad BF, & BK, consequentes simul, hoc est, ad totã FK, vt FK, ab BK. Ac propterea FK, media proportionalis est inter HK, BK. Quare vt HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, secunda. Quia vero CG, cum Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem DC, applicatum [f] facit DG, latitudinem Rationalem ipsi DC, longitudine commensurabilem; Erit quoque HB, ipsi DG, æqualis, Rationalis & longitudine commensurabilis ipsi DC. Et quoniam ostensum est, esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quoque vt BD, ad DC, ita HK, ad FK. [g] Igitur vt quadratum ex BD, ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex FK. At quadratum ex BD, commensurabile est quadrato ex DC. (quod rectæ BD, DC, sint Rationales potentia commensurabiles, cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus.) [h] Commensurabile igitur erit

e 12. qn
f 21. dec
g 22. sex
h 10. dec

quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed fuit vt quadratum ex HK, ad quadratum ex FK; ita recta HK,
a 10. dec ad BK [a] Igitur longitudine commensurabilis est HK, ipsi BK; atque adeo & reliquæ BH, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commensurabilis, Rationalis est; ac propterea & BK, ipsi HK, commensurabilis, Rationalis existit. Cum ergo ostensa sit FK, ipsi BK, potentia solum commensurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK, BK, Rationales
b 74 dec sint, & potentia tantum ostensæ commensurabiles, [b] erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod est primum.

QVONIAM vero ostensum est esse rectam HK, totã
c 16. dec parti BK, longitudine commensurabilem, [c] erunt propterea & BK, BH, longitudine inter se commensurabiles. Cum ergo BH, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi DC; erit quoque BK, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem DC, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt autem modo
d 10. dec DC, BK, ostensæ longitudine commensurabiles; [d] Erunt quoque BD, FK, commensurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipsi BD, & BK, ipsi DC, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.



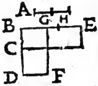
ITEM quia demonstrauimus esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; erũt idcirco Apotomæ nomina FK, BK, in eadem ratione cum BD, DC, nominibus ipsius BC, quæ est ex binis nominibus. Quod est tertium.

POSTREMO vel BD, plus potest, quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest BD, quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cum sit vt BD, ad
e 15. dec DC, ita FK, ad BK; [e] poterit quoque FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si

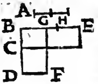
BD, plus poteſt quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Et ſi quidem BD, expoſitæ Rationali fuerit longitudine commenſurabilis; erit & FK, quæ longitudine oſtenſa eſt commẽſurabilis ipſi BD, commenſurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in ſcholio propoſ 12. huius lib. demonſtrauimus. Si vero DC, ſit Rationali commenſurabilis longitudine; erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine commenſurabilis Si denique neutra ipſarũ BD, DC, ſit Rationali longitudine commẽſurabilis; [a] erit quoque neutra ipſarum FK, BK, commenſurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine eſt Apotome BF, ipſi BC, ex binis nominibus, vt conſtat ex definitionibus ſecundis, atque tertiis. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonſtrandum erat. a 14. dec

THEOR. 90. PROPOS. 114. Cxiij. o.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatũ, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipſa Apotome.



SIT Rationalis A, & Apotome BC, cui congruat CD, [b] & ad BC, applicetur rectangulum CE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE, Dico BE, eſſe ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC, & in eadem proportione; & adhuc ipſam BE, ex b 45. pri



a 45.pri. binis nominibus, esse ipsi BC, Apotomæ ordine eandem.[a] Applicetur enim rursus ad BD, totam, rectangulum BF, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi CE, latitudinem faciēs BG. Et quoniam BF, CE,

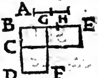
b 14. vel 16. sexti æqualia sunt;[b] erit vt BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per cõuersionem rationis, vt BE, ad GE, ita BD, ad CD. Secetur quoque EG, ad H, secundum proportionē BE, ad GE, ex ijs, quæ in schol. propos. 10. lib. 6. conscripsimus; vt sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est vt BE, tota ad GE, totam, ita E H, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablatam; erit quoque BH, reliqua ipsius BE, ad HE, reliquam ipsius GE, vt tota B E, ad totam GE: Erat autem vt BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erit igitur quoque vt BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis est inter BH, GH. Quare erit vt BH, prima ad GH, tertiam, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia vero fuit vt BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE: & sunt BD, CD, cum sint nomina Apotomæ BC, Rationa-

c 10. dec les potentia tantum commensurabiles,[c] Erunt quoque BH, HE, potentia solum commensurabiles; Ac propterea quadrata ex BH, HE, commensurabilia. Igitur rectæ BH, GH, eandem habentes rationem cum quadratis ex BH,

d 10. dec. HE, vt demonstrauimus,[d] longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota BH, longitudine commensurabilis existens parti GH, commensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ BG, ex coroll. propos. 16. huius lib. At vero cum BD, Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ BC; & rectangulum B F, quadrato ex Ra-

e 21. dec tionali linea A, æquale, Rationale;[e] erit latitudo BG, Rationalis commensurabilis longitudine ipsi BD. Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & BH, eidem BD, Rationali commensurabilis est longitudine, atque adeo Rationalis existit; quandoquidem BH, BG, longitudine commensurabiles sunt ostensę. Quia vero BH, HE, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantū, & BH, Rationalis; erit quoque HE, illi commensurabilis, Rationalis. Rationales er-

go sunt BH,HE,potentia solum commensurabiles: a Ac a 37.dec
propterea BE, ex binis nominibus est.
Quod est primum.



QVONIAM vero ostendimus esse BH, ad HE, vt BD, ad CD, atque adeo permutando BH,ad BD,vt HE, ad CD; Ostensa est autem BH,ipsi BD, longitudine commensurabilis; b b 10.dec
erit quoque HE, ipsi CD, commensurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipsius BE,ex binis nominibus commensurabilia sunt longitudine nominibus BD,CD, Apotomæ BC. Quod est secundum.

IMMO & in eadem proportione,cum demonstratum sit esse BH,ad HE,vt BD,ad CD. Quod est tertium.

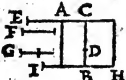
POSTREMO vel BD, plus potest quam CD, quadrato rectę sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, c poterit quoque BH, c 15.dec
plus quam HE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine: Et si BD, plus potest, quam CD, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidem BD, Rationali expositæ longitudine sit commensurabilis; erit quoque BH, commensurabilis existens longitudine ipsi BD, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propos. 12. huius lib. Si vero CD, longitudine sit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si vero neutra ipsarum BD, CD, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; d erit quoque neutra ipsarũ BH, d 14.dec
HE,eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atque tertiis definitionibus, ipsa BE, ex binis nominibus, ordine eadem est ipsi Apotomæ BC. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quę ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomę nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

Cxiiii. o.

THEOR. 91. PROPOS. 115.

SI ſpatium contineatur ſub Apotoma,& ea,que ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomę,& in eadem proportione; Recta linea, ſpatium potens,eſt Rationalis.

CONTINEATVR ſpatium AB,ſub Apotoma A C, & ſub CB, ex binis nominibus,cuius nomina CD,DB,commenſurabilia ſint nominibus CE,AE,Apotomæ AC;& in eadem ratione,nempe C D, ad DB, vt C E, ad AE. Poſſit autem recta F,ſpatium AB.Dico F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rationali G, a applicetur ad CB,quæ ex binis nominibus,rectangulum C H, æquale quadrato ex G.b Erit ergo latitudo BH,Apotome, cuius nomina HI,BI,longitudine commenſurabilia ſunt nominibus CD,DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt CD,ad DB;atque adeo vt CE, ad AE,& permutãdo, vt tota HI, ad totam CE,ita ablata BI,ad ablatam AE,c Erit ergo & reliqua BH,ad reliquam A C, vt tota H I, ad totam CE;d Commenſurabilis autem eſt longitudine H I, ipſi CE, quod vtraque H I, C E, commenſurabilis fuerit longitudine ipſi CD.e Igitur & BH,ipſi AC,longitudine eſt commenſurabilis; f Atque idcirco & H C, ipſi B A, commenſurabile erit,g cum ſit vt HB,ad AC,ita HC, ad BA:Sed H C, quadrato Rationalis G, ęquale Rationale eſt.Igitur & BA,illi commenſurabile,Rationale erit,propterea que & recta F,ipſum B A, potens, Rationalis erit. Quapropter ſi ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus,cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ,& in eadem proportione;Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis. Quod erat demonſtrandum.



a 45. pri
b 113. decimi.
c 19. qn
d 12. dec
e 10. dec
f 10. dec
g 1. ſexti

CO-

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium A B, contentum sub AC, CE, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIVM.

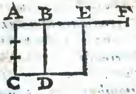
IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus commensurabilia esse lõgitudine. In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116. Cxv. Cvii.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

SIT Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali AC, contineatur sub AB, Media, & Rationali AC, spatium AD. Est ergo AD, spatium sub Rationali AC, & Irrationali AB, contentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Possit ipsum recta B E, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico B E, non esse eandem alicui tredecim illarum quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem AC, applicatum, [a] latitudinem faciat Rationalem ipsi A C, longitudine incommensurabilem; Et quadrata reliquarum duodecim Irrationaliũ, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius [a] 23. dec.

lib. At vero quadratum huius Irrationalis BE, ad eandem Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinē Mediam; perspicuum est, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.



QVOD si compleatur rectangulum DE; erit & hoc contentum sub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lemmate propo. 38. Possit ergo ipsum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rursus EF, non esse eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi BE. Hoc autem manifestum est, cum quadratū ipsius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarū tredecim, & quadratum etiam ipsius BE, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes à BE, vt demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & a dictis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

Cxviii. vii.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

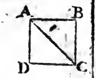
PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommensurabilem esse lateri AB. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; [a] ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; sintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad nu-

[a] 5. dec.

me-

merum G. Erit quoque vt quadratum ex A C, ad quadratum ex A B, ita quadratus numerus ex E F, ad quadratum numerum ex G, ([a] Cum enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex A C, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex EF, cum dimidium habeat, atque adeo bifariã possit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipse E F, illum producens, par erit. (Si namque impar esset, cum se ipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; [b] eo quod impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia vero EF, & G, in sua proportione minimi, [c] inter se primi sunt; & EF, ostensus est par, erit G, impar. (Si enim par etiam esset, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque adeo non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus est numeri EH; [d] & quadrati habẽt proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex E F, quadruplus quadrati ex E H. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex E F, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partium 4. est quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G; & taliũ 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex E H, cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt supra de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens; par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter AC, lateri AB. Igitur incommensurabilis longitudine.



a 20. sex & 11. octaui.

b 29. noni.

c 24. sep

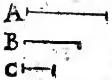
d 11. oct

merus quadratus ad numerũ quadratũ.a Incõmensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositũ. a 9.dec.

HOC etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin.8.lib.5.& in scholio propos.8.lib.8.et in scholio propos.9.huius libri.

CAETERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometriæ libris pendet, vt merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commẽsurabilitatem omnium magnitudinũ, & incommensurabilitatẽ pertinens: visum est eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A, C, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit B. Quoniam igitur ex coroll. propos.20.lib.6. vt A, ad C, ita est figura rectilinea quæuis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterq; positam super B, & sunt A, & C, longitudine incommensurabiles; b erunt rectilinea illa figura super A, & B, incommensurabiles. b 10.dec



RVRSVS c quoniam circuli, quorum diametri A, B, proportionem habent quam quadrata ex A, & B, descripta: Quadrata autem hæc, cum sint figuræ rectilineæ similes, similiterque positæ, proportionem habent, quam recta A, & C, ex coroll. propos.20 lib.6. d Habebunt quoque circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quam rectæ A, C. Sed rectæ A, C, incommensurabiles sunt longitudine. e Igitur & circuli diametrorum A, B, incommensurabiles sunt. c 2. duodecimi. d 11.qu e 10.dec

IAM vero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterque descriptæ super A, B, f habebunt pyramides, atque prismata eandem proportionem, quam ba- f 5.6. uel 7. duodecimi.

ses, hoc est, quam rectilinea illa figura. Quare cum rectilinea illa figura incommensurabiles sint, vt modo est demonstratum; a *incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.*

a 10. dec

QVOD si coni, vel cylindri aeque alti fabricentur, quorũ bases circuli sint diametrorum A, B, b *habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles,* c *Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solum lineae, & superficies incommensurabiles, verum etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum.*

b 11. duodecimi. c 10. dec

EADEM autem ratione, si rectae A, & B, longitudine cõmensurabiles sint, d *ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterque descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse,* e *atque adeo & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est.*

d 10. dec. e 5. 6. 7. & 11. duodec.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POSTQVAM Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibique nomen Geometriæ, tanquam proprium, vsurpauit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinã linearum commensurabilium, atque incommensurabilium, quas idcirco luculentissime in libro decimo deinde exposuit, vt constructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissime differitur, perfectius posset cognosci:

Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partē Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatē, quæ præter longitudinem latitudinemque sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita vt tres dimensiones possideat, vnam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemve, appellari solidum, siue corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantum habēs, linea; quæ vero longitudini latitudinem adijcit, superficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt recte intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod e loco in locum moueri; hac enim describit vestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, propterea quod punctum omnis est magnitudinis expers; vt autem percipiamus superficiē, mōnent, vt intelligamus lineā aliquā in transuersum moueri; hac enim describet vestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latū vero propter motum illum, qui in transuersum est factus; carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatē trina dimensione præditam, consulunt, vt cōcipiamus superficiem aliquam æqualiter eleuari, siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur vestigiū quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundū vero seu crassum, propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hac ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta distincta a linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quod triplex tantū dimensio possit assignari, vt perspicue in commentarijs, quos in sphæram Ioannis de Sacro Bosco conscripsimus, a nobis fuit demonstratum ex Ptolemæo in libello de Anatemmate.

II.

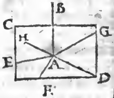
SOLIDI autem extremum, est superficies.

QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, superficies vero lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

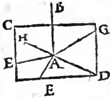
LINEA recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, queque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

VT linea recta AB, plano CD, insistens, ita vt B, punctum sit in sublimi extra planum CD, ut punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus alijs, quæ in eodẽ existentes plano ipsam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt AB, æqualiter insistat plano CD, & non magis in unam partem, quam in aliam

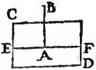


inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque deinceps BAH, rectus, ideoque illi æqualis. Eademque ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, vt AB, cum vna linea ex A, in plano CD, educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum alijs omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB, recta ad pla-

num CD. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planũ recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et e cõtrario, vt recte cõcludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectã, demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.



VT autem recta quæpiam plano cuicunque insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamque tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed se mutuo secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum omnibus alijs rectos quoque angulos efficere, vt perspicuum fiet ex propos. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia si duæ lineæ componãt vnam rectam lineam, non necessario efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus alijs rectos conficere angulos. Recta enim A B, insistat plano C D, efficiatque rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF, quæ rectam vnam lineam componant. Dico AB, non propterea cum omnibus alijs rectos angulos constituere; atque idcirco non esse rectam ad planum CD. Hoc autem perspicuum est, cum AB, circa EF, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipsa cum E F, semper eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod si eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quales sunt AG, AD, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnibus alijs rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucide demonstrabitur propos. 4. huius lib.

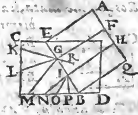


IIII.

PLANVM ad planum rectum est,

cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

INSISTAT planũ AB, plano CD, ita vt linea AQ, sit in sublimi, hoc est, extra planum subiectum CD, at EB, in ipso eodem plano. Sit autem horum planorum communis sectio EB, quæ, vt demonstrabitur propos. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem sumptis quotcunque punctis G, I; ex ipsis in plano AB, ducantur GF, IH, perpendiculares ad communem sectionem EB. Si igitur lineæ FG HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum alijs omnibus in plano CD, a punctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partẽ inclinabit, quam in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi æqualis: Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient vtrobique a lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.

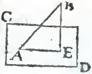


V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio est, cum a sublimi termino rectæ illius

lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque a puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea, & adiuncta comprehensus.

INSISTAT recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita vt punctum B, sit extra planum in sublimi, punctum uero A, in plano. Deinde ex B, termino sublimi recta AB, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta EA; eritque necessario angulus BAE, acutus, a17.pri. *a cum in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus sint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehensus linea insistente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio recta AB, ad dictum planum CD; Ita vt tanta dicatur esse inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus est dictus angulus acutus BAE.*

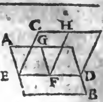


VI.

PLANI ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

PLANO namque AB, insistat planum CD, ita vt pars ad C, sit in sublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipso plano AB, sitque CD, inclinatum ad AB; & communis eorum sectio sit DE. Si igitur ad DE, communem sectionem ex

eius pũcto F, duæ perpendiculares ducantur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometræ angulum GFH, dicunt angulũ inclinationis plani CD, ad planum AB; siue is acutus sit, siue rectus, obtususve: quamquam proprie solũ angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani supra aliud, quam inclinationem vnius ad alterũ; obtusus vero recessum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu eleuationem unius plani supra alterum, generaliter dici consueuit a plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod unum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus GFH, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

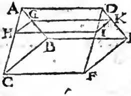
PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON obscura est hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo a recto magis recesserit.

VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur: hoc est, siue ad dexteram, siue ad sinistram: & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec ad sinistram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda; quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscisum, remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinite ad dextrã, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa cocunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.



SIT enim tectum quodpiam A B C D E F, contentum duobus planis ABED, ACFD, cuius basis BCFE, auferaturque fastigium AGHDKI. Quo facto, perspicuum est, reliqua plana GBEK, HCFI, non conuenire inter se, si ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producãtur; nec tamẽ idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes GH, KI, conueniant in fastigio A D. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, vt in nullam partem producta inter se conueniant. Sicut autem lineæ in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dextram: ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, atque deorsum. Itaque duo plana quæcunque, vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; lineæ vero rectæ, vel sunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conueniunt, si nimirum in eodem existant plano, vel tandem nec sunt parallelæ, neque unquam conueniunt, si videlicet in diuersis sint planis, & in transuersum posita. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.

IX.

SIMILES solidę figurę sunt, quæ

ſimilibus planis continentur, multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides ſimiles figuras ſolidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis ſimilibus definiendis: Satius tamen eſſe iudicauit, vt breuitati conſulens eas ex ſimilibus planis multitudine æqualibus deſcriberet; præſertim quod ex ſimilitudine planorum ſtatim conſequatur & angulorum ſolidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cũ illos conſtituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum ſimilitudinem.

X.

AEQVALES, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

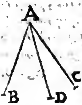
QVOD ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia ex præcedenti definitione circumſcribuntur, fuerint æqualia, ſingula ſingulis, dicentur eiuſmodi figuræ ſolidæ non ſolum ſimiles, verum etiam æquales. Nam ſi animo cõcipiantur ſe ſe penetrare mutuo huiuſmodi ſolida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac ſimilitudinem planorum. Ex ſimilitudine enim planorum infertur angulorum ſolidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus, ex eorundẽ vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare ſolida illa omni ex parte ſibi mutuo congruent: ac propterea inter ſeſe exiſtent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus eſt plurium, quam duarum linearum, quæ ſe mutuo contingãt,

nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVAE lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planū, vt lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres lineæ AB, AC, AD, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositus. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB, AC, iam non cōponetur angulus planus totus ex BAD, DAC, immo circa punctum A, tres plani consistent anguli BAD, DAC, CAB, qui, vt mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.



ALITER.

SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad vnum punctum constitutis, continetur.

HAEC definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti rectè intellecta. Cum enim saltem tres lineæ in eodem non existētes plano necessaria sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus solidus efficiatur, vt ex superiori figura

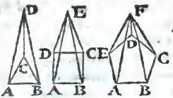
apparet. Angulus enim BAD, in plano est, in quo recta A B, AD, & angulus DAC, in plano, in quo recta AD, AC; angulus denique CAB, in plano, in quo recta AC, AB, atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum consistant in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus solidus, sed totus quidã angulus planus, vt supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiamsi in diuersis sint planis. Hiabit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis prabent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum connexientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si vna earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his vero perspicuũ cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse aequales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine aequalibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineae rectae quã duae, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica superficie curua cõtinetur, neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

PYRAMIS est figura solida, quę planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta.

VIDELICET figura solida a planis ABC, ABCD,

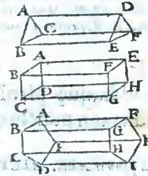


ABCDE, ad puncta D, E, F, constitutæ appellantur pyramides. Perspicuũ autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositũ. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominationem sumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrãgula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nũcupari solet. Vt pyramidis triãgularis, præter basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD: Quadrangula vero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia & similia, & parallela, alia vero parallelogramma.

FIGVRAE scilicet solidæ, quarum plana aduersa & æqualia, & similia, & parallela sunt triãgula ABC, DEF:



vel quadrãgula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma vero ACFD, ABED, CBEF; vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit, quã columna quadam

dam laterata æqualis crassitudinis, cuius bases opposita sunt æquales, similes, & parallelæ, siue hæ sint triãgula, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli, in vno quoque oppositorum planorum reperiuntur, vt figuræ indicant.

EX his manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela æqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt constat; præsertim quod plurimæ demonstrationes in hoc lib. & 12. sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniunt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpserunt autem fortasse hi auctores occasionem errandi, quod Euclides & in propos. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propos. lib. 12. solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, septimam propositionem lib. 12. illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum oppositorum, eo quod tali prismati solum demonstratio illa conuenit. Quod si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cum nullum aliud prisma daretur. Immo in corollario dictæ propositionis septimæ infert Theon Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis, altitudinem æqualem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triãgula, sed alia quæuis rectilinea, æqualia tamen & similia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundum Theonem, atque adeo secundum Euclidem, cum communi omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqua

lia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHAERA est, quando, semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumassumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum: ita & semicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circũductus figuram describit, quam Geometræ sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, a quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quod omnes æquales existunt illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quod omnes sunt semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiam modo.

SPHAERA est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

CICERO in libro de Vniuersitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod σφαιροειδὴς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus a medio radijs attingitur.

XV.

AXIS autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM sphęræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

DIAMETER autem sphærę, est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

HAE tres definitiones non egent expositione, dummodo hoc solum notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axē, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquę, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit co-

nus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT si triangulum rectangulũ ABC, circa latus quiescẽs AB, quod est circũ rectũ angulũ, circumducatur, donec integram reuolutionem expleat, describetur solida quædam figura, quæ continetur duabus superficiebus, circulari vna ac plana, quam B C, latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit: & curua alia, eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.



QVOD si latus quiescens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogo*nius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticẽ A, rectus est. Cum enim latera AB, BC, ponantur æqualia;*
a 5.pri. *a erunt & anguli BAC, BCA, æquales, qui cum æquiualeant vni recto, eo quod ABC, rectus est, erit angulus BAC, semirectus. Eodemque modo angulus BAD, ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus C A D, rectus erit. Si vero quiescens latus AB, minus fuerit circumducto B C, vt in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A, obtusus existit. Cum enim B C, latus latere A B, sit*
b 18.pri *maius; b erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant vni recto, propterea quod angulus A B C, ponitur rectus, erit BAC, semirecto maior. Similiter BAD, maior erit semirecto; atque adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quiescens latus AB, maius fuerit circũdu cto BC, vt in tertia figura, appellabitur conus descriptus* Oxygonius, *seu acutãgulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus est. Cum enim latus AB, maius sit latere BC,*
c 18.pri *c erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cũ hi duo vni recto æquiualeãt, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, semirecto maior, ideoq; reliquus BAC, semire-*

cto minor. Non secus ostendetur angulus B A D, minor esse semirecto. Igitur totus C A D, recto erit minor.

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.

XX.

BASIS vero coni est circulus, qui a circumducta linea recta describitur.

NIMIRVM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est BC, in superioribus conis. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ad basim rectus non est; placuit ex Apollonio Pergao adducere generalem coni descriptionem, qua & rectum, et inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, qua Euclides de recto cono ostendit, vt ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiã circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousq; ad eum locum redeat, a quo cæpit moueri: Superficiem a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter se se aptatis,

quarum

quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quę eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiē.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quę per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentam circulo, & conica superficie, quę inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & superficiei conicæ vertex est.

AXEM, rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum producitur.

BASIM, circulum ipsum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

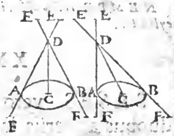
SCALENOS vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

HAEC autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium scripsit.

SIT circulus AB, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D; iunctaque DB, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea DB, feratur eousque in circuli AB, circumferentia, quousque punctū B, rursus in eum locum restituatur, a quo capit moueri: describet superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad D, punctum se se tangentibus. Eam vo-

cat.

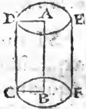
cat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB, ipsam describes in infinitum producitur. Verticem superficiei dicit punctum D. Axem, rectam DC. Conum uero appellat figuram contentam circulo AB, & ea superficie, quam DB sola describit. Coni uerticem punctum D. Axem DC. Basim AB, circulum. Quod si DC, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum uocat conum; Sin minus, Scalenum.



XXI.

CYLINDRVS est, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circum ductum parallelogrammum in seipsum rursus reuoluitur, vnde cœperat moueri, circumassumpta figura.

VELUTI si rectangulum parallelogrammum A B C D, circa latus quiescens A B, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficiebus cõtinetur, duabus videlicet; planis circularibus, quas latera A D, B C, describunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus C D, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, ut Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.



XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens il-

la recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB, in superiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri sunt circuli à duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

QVALES sunt circuli a lateribus AD, BC, oppositis descripti.

EVCLIDES porrò solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuerse; vt complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte coniungẽs, quousque rursus in eum locum restituatur, a quo moueri cæpit: Superficies, quæ a circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies

ficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, linea ipſa deſcribente in infinitum producta.

CYLINDRVS eſt figura, quæ circulis æquidiſtantibus, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur.

CYLINDRI baſes ſunt circuli ipſi.

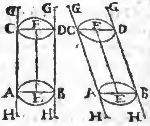
AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

LATVS autem cylindri, linea, quę cum recta ſit, & in ſuperficie ipſius cylindri, baſes vtraſque contingit; quam & circumlatam, cylindri ſuperficiem deſcribere antea diximus.

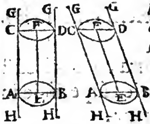
CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent.

SINT duo circuli æquales, & æquidiſtantes AB, CD, quorum centra E, F, & diametri æquidiſtantes quoque AB, CD: Iunctaque recta AC, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa centra E, F, in planis circulorũ ſemper æquidiſtantes, vna cum recta



AC,



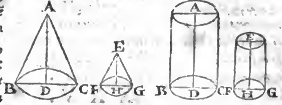
AC, circumducantur, donec ad sũ locum restituantur, unde moueri cœperunt; describetur a linea AC, superficies quædam rotũda, quam Serenus cylindricam uocat; quæ et augetur in infinitum, cum recta AC, ipsam describens in infinitum, producitur. Cylindrum vero appellat figuram ABDC, circulis AB, CD, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos ABCD. Axem, rectam EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod si axis EF, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

XXIIII.

SIMILES coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

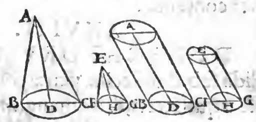
RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundum duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes vero eosdem secundum profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis autẽ axes AD, EH, & basiũ diametri BC, FG; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter basis ad FG, diametrum basis, dicentur tam coni, quam cylindri similes inter se; quia videlicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundũ profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum reuolutione descripti sunt coni, nec non rectangula AB, EF, quorum conuersiones cylindros effecerũt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit vt AD,

ad EH, ita BC, ad FG; Sit autē ot BC, ad FG, [a] ta dimidia BD, ad dimidiā FH: erit quoque vt AD, ad EH, ita [a] 15. qu



DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula, & rectangula similia inter se erūt: Triangula quidem, [b] propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula sunt, [c] ideoque latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeo inter se similia existunt: Rectangula vero, [d] eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, DB, sunt æqualia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habent. [b] 6. sex. [c] 5. sexti [d] 34. primi.

QVOD si coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum similes, quando eorum axes, & diametri basiū erūt proportionales, anguli que inclinationū, quos axes efficiunt,



æquales: qui quidem anguli accipiendi sunt, vt in definitione quinta dictum est. Sint enim coni inclinati, similiter & cylindri ABC, EFG: In conis autem axes sint AD, EH, & basium diametri BC, FG; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, extiterintque anguli inclinationū ADB, EHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter se; dicentur & coni inter se, & cylindri quoque inter se similes; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimensiones sunt

proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non sint recti.

XXV.

CVBVS est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDRVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagónis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

HAEC sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, ut ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Pla

to in

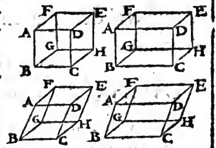
in Tymaeo quinque mundi corpora, quæ simplicia a philosophis nuncupātur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat, ut in sphæra Ioannis a sacro bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio traditur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraedri vero propos. 13. Octaedri deinde propos. 14. Dodecaedri autem propos. 17. Icosaedri denique propos. 16. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, ut veram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Tradēmus tamen proprijs in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque illa dari potest, ut demonstrabimus ad finem lib. 13.

QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. fit mētio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit parallelepipedum, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

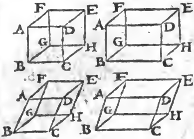
XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarū, quæ ex aduerso, parallelæ sunt contēta.

VELVTI solida figura comprehensa sex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum opposita AC, FH; Item DF, CG; Item AG, DH, sunt parallela, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehēsa. quæ quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, ut demonstrabitur propos. 24. huius lib.



SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorũ. Si enim



ſex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc eſt, quadrata, dicetur parallelepipedũ illud, cubus, reſpondebitque quadrato in planis figuris: Si autem ſex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, ſed altera parte longiora, quamuis duo ſint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod ſi ſex parallelogramma extiterint, æquilatera quidẽ, ſed non omnia rectangula, quamuis duo ſint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique ſex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo ſint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerſo, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Priſma, vt ex definitione priſmatis conſtat.

XXXI.

SOLIDA figura in ſolida figura dicitur inſcribi, quando omnes anguli figurę inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figurę, cui inſcribitur.

XXXII.

SOLIDA figura ſolidæ figuræ viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figurę circum

ſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam deſcribitur.

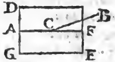
NON eſt neceſſe, vt anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel a lateribus, vel denique a planis figuræ exterioris.

VERVM duæ hæ poſtremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibuſque mutuis corporum regularium copioſe agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

RECTAE lineæ pars quędam non eſt in ſubiecto plano, quędam vero in ſublimi. j.

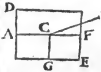
SIT enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in ſubiecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita, vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE, exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC. quod eſt abſurdum, vt in pronunciatio 10. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

HAEC eſt communis demonſtratio interpretũ. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nẽpe vt oſtendatur, recta AC, eſſe aliquam rectam in plano DE, in directũ, & continuum poſitam. Qui enim concedit, recta AB, partẽ quidem AC, eſſe in plano DE, partem vero CB, in ſublimi,

vtique negabit, recta AC, in plano DE, dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuũ positam esse fatetur ipsi AC. Veruntamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectã quamlibet finitam in quouis plano datã



posse in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cũ plana superficies sit illa, quæ ex æquali suas interiacet lineas, hoc est, quæ recte, & æqualiter semper extenditur; vt & linea recta. Quamobrem si AC, in plano DE, producatur vsque ad F, erit CF, recta rectæ AC, in continuum & directum posita. Verum demonstremus iam id ipsum Geometrice, in plano videlicet DE, ipsi AC, dari posse aliam rectam, quæ cum ipsa vnam rectam lineam constituat, quãuis quis dicat, AB, esse quoque rectam, eiusque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in sublimi esse positam. a 11. primi. *a Ducatur enim in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG; & in eodẽ plano ipsi CG, perpendicularis CF. Dico CF, esse ipsi AC, positam in continuum & rectum. Cum enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione;* b 14. primi. *b erunt AC, & FC, in directũ et continuum posita. Quamobrem etiamsi quis contendat, AB, esse rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, subiecto, pars autem CB, in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam constituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB, AF, segmentũ commune habebunt AC. Quod est absurdum.*

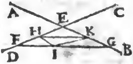
HINC fit omnes partes cuiusuis rectæ lineæ, hoc est, totam rectam lineam, in vno existere plano.

ij.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.

RECTAE lineæ AB, CD, se mutuo secent in E, & in EB, ED, sumptis punctis F, & G, vtcumque, ducatur recta



FG, vt fiat triangulum E F G. Dico triangulum EFG, in vno esse plano; Item rectas A B, C D, in vno quoque plano existere. Si enim trianguli E F G, pars quædam, nimirum EHIG, in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in sublimi, vel contra; Existent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in sublimi, vel contra. quod fieri non posse, iam supra a demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur esse, pars autem GIK, in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in uno plano, partes vero KG, IG, in sublimi, vel contra. Si denique eiusdẽ trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel contra. Quæ omnia absurda sunt, b vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in uno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

a 1. vndecimi.

b 1. vndecimi.

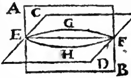
QVIA vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG: c in eodem sunt rectæ totæ C D, A B, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulnm EFG. consistere demonstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

c 1. vndecimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuo plana AB, CD, sitque communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF,



& in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, cõis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendũ.

ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cum eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tãtum plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

iiij.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

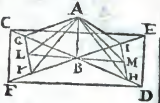
SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat. Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectã AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secent in B; a erunt ipsæ in vno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK; ducanturque rectæ GK, IH; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateri-

a 2. vndecimi.

bus

ous BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; a & anguli quoq; ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales: b Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales. a 15. pri. b 4. pri.



RVRSVS c cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. d Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt. c 15. pri. d 26. pri

PRAETEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, e erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK. e 4. pri.

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; f erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales. f 8. pri.

ITAQVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; g erunt quoque bases AL, AM, æquales. g 4. pri.

QVONIAM denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sũt lateribus AB, BM, triãguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demõstratis; h erũt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehẽsi, æquales; qui cũ sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cũ recta LM, quę in plano subiecto ipsam tãgit in B: Eadẽq; rõne ostendetur, rectã AB, cũ omnibus rectis, quæ in eodẽ plano ipsã tangẽt in B, angulos rectos cõstituere, etiã si inter pũcta G, I, & K, H, ductæ sint, dũmodo rectæ GI, KH, iũgãtur: vel certe literæ disponãtur, vt prius, quemad h 8. pri.



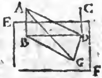
dum. Duabus igitur rectis BC, BD, in uno plano FC, existentibus, non erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

vi.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos, sint angulos; Parallelę erunt illæ rectę lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta B D, in plano E F, erunt anguli A BD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; a erunt bases æquales A D, G B. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli G D A, Est autem & basis communis AG, b erunt anguli A B G, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. c Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erũt plano, hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: d Est autẽ AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti; e erunt rectæ AB, CD, parallelę. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



a 4. pri.
b 8. pri.
c 5. undecimi.
d 2. undecimi.
e 28 pri

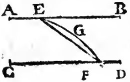
THEOR. 7. PROPOS. 7.

vii.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in

quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quę ad hęc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis AB, CD, sumantur vtcunque duo puncta E, & F, quę recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra; secet iam aliud planum superficiem parallelarum per



puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum
a 3. vndecimi. EGF, a quæ recta linea erit. Duæ igitur rectę E F, E G F, cum habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent. quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HAEC eadem propositio vera est, etiamsi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non sint, dummodo in eodem plano existant, vt manifestum est ex demonstratione.

viii.

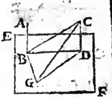
THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ AB, CD; sitque C D, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano E F, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano E F, erit
b 29. pri per defin. 3. huius lib. angulus CDB, rectus: b Sunt au-

tem

tem duo C D B, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad B D; ponanturque æquales B G, CD. Coniungantur deinde rectæ D G, G C, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus G B, BD, trianguli G B D, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti, C D B, GBD, æquales, nimirum recti; [a] Erunt bases CB, GD, æquales; Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, BC, trianguli G B C; & basis est communis CH; [b] Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta G B, duabus rectis BD, BC, se mutuo secantibus in B, (Si namque producerentur DB, C B, secarent sese in B, ob angulum CBD.) ad rectos angulos existent; [c] ac proinde ad rectos angulos erit plano per B D, BC, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB; [d] propterea quod rectæ BD, BC, in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD; cum puncta B, C, D, existant in parallelis AB, CD. Igitur & G B, recta rectæ B A, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cum AB, recta sit ad rectas BG, BD; [e] erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit: Quod erat ostendendum.



a 4. pri.

b 8. pri.

c 4. undecimi.

d 7. undecimi.

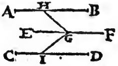
e 4. undecimi.

THEOR. 9. PROPOS. 9. ix.

QVAE eidem rectę lineę sunt parallelę, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelę.

SINT rectæ AB, CD, ipsi EF, parallelæ; non sint autem in eodem cum EF, plano. Dico A B, C D, parallelas

quo-



quoque esse. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipsam EF, ducãtur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF, at GI, in plano parallelarum CD, EF Quoniam igitur E G, recta est ad duas rectas G H,
a4. vndecimi. G I, se tangentes mutuo in G; a erit recta quoque ad planum per ipsas GH, GI, ductum. Quamobrem cum sint parallelæ AB, EF, & EF, sit recta ad planum per GH, GI, du-
b8. vndecimi. ctum; b erit quoque AB, ad idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ CD, EF, sit autem EF, recta ad planum
c8. vndecimi. per GH, GI, ductum; c erit etiam C D, recta ad idem planum; d Atque proinde rectæ AB, C D, cum rectæ sint ad
d8. vndecimi. idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelę, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

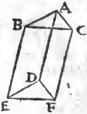
SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non esse in eodem plano cum recta EF, cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa EF; essent AB, CD, inter se parallelæ, ex 30 propos. 1 lib. Superuacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

x. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

SINT rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur einm AB, DE, inter se æquales. & AC, DF, inter se; ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelę



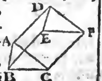
ſunt & æquales;a erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumẽto parallelæ erũt & æquales CF, AD. Quare cũ BE, CF parallelæ & æquales ſint eidem AD, b erunt etiam BE, CF, inter ſe parallelæ, & ęquales; c Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectę BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex conſtructione; & baſis BC, baſi EF, æqualis, vt modo demonſtrauimus; d Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehenſi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat oſtendendum. a 33. pri. b 9. vndecimi. c 33 pri. d 8. pri.

S C H O L I V M.

CONCLVSIO huius theorematis vera etiam eſt, quando priores duæ rectæ in eodẽ ſunt plano cum duabus poſterioribus Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodẽ plano, ſitque AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, eſſe æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF, ducãturque rectæ BC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt cõſtitutæ, aut non. Sint prius in vna recta BF. Quoniam igitur parallelæ ſunt AB, DE, e æquales erunt anguli ABC, DEF, internus & externus, Similiter æquales erunt anguli ACB, DFE. Sunt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC; ACB, trianguli ABC, æquales sũt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF. f Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod eſt propoſitum. e 29. pri. f 32. pri.



NON ſint iam BC, EF, in vna recta linea conſtitutæ. Ductis rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, ſint parallelæ & æquales; g erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidem AD, parallelæ exiſtentes & æquales, h inter ſe parallelæ erunt & æquales; i Ac proinde parallelæ & æquales quoque erũt BC, EF. Itaque cum duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus DE, DF, trianguli g 33. pri. h 30. pri. i 33. pri.

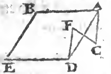


DEF,

a 8.pri. *DEF, & basis BC, basi EF, a erunt anguli B A C, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.*

CAETERVM vt conclusio huius theorematis recte ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (siue omnes sint in eodem plano, siue nõ,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nulla ratione se mutuo secent; vt ex prima & vltima figura apparet. Nam alias conclusio vera non erit.

SVNT enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos cõprehẽdunt,



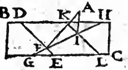
non sunt æquales, cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem ideo euenit, quod A D, C F, se mutuo secant. Vnde quamuis AC, DF, sint parallelæ & æquales, nõ tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ sunt & æquales, propterea quod eas non coniungunt ad easdem partes, vt vult propos. 33. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematis locum nõ habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in superioribus figuris seruatur.

xi. ## PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT a puncto A, in sublimi ad subiectum planum BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta

b 12.pri vtcunque DE, b ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F: Et



c 11.pri in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur G H, c ad quam

d 12.pri ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, esse perpendicu-

e 31.pri larem ad planum subiectum B C. d Ducta enim in plano

f 4. vndecimi. BC, per I, ipsi DE, parallela K L, cum D F, ad rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione, f ac proinde

g 8. vndecimi. recta ad planum per FA, FH, ductum, g erit quoque K I,

ad idem planum per FA, F H, ductum recta. a Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitque rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus KIA: rectus; atque adeo AI, ad rectos angulos erit duabus KI, IF. b Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam diximus. Quod faciendum erat. a 12. undecimi. b 4. undecimi.

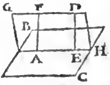
SCHOLIVM.

QVOD si quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem sit, qua AF, ad DE, ducta perpendicularis c, erit ipsa AF, ab initio ad DE, ducta perpendicularis, ad subiectum planum BC, perpendicularis, cum perpendicularis sit ad vtramque DE, GH. c 4. undecimi.

PROBL. 2. PROPOS. 12. xii.

DATO plano a puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT a dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC. d Ex quouis puncto D, in sublimi demittatur ad planum BC, perpendicularis DE, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E, & A, e ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, recta esse ad planum datum BC. Cum enim DE, AF, parallelæ sint; & DE, recta ad planum BC, ex constructione: f erit quoque AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat. d 11. undecimi. e 31. primi. f 8. undecimi.

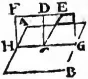


THEOR. 11. PROPOS. 13. xiii.

DATO plano, a puncto, quod in

illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

SIT datum planum AB. Dico a dato eius puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planū AB. Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB, & per CD, CE, a quę in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum FG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cū igitur BC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales pars, & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineę ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.



a 2. vndecimi.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem planum AB; b erunt ipsæ inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

b 6. vndecimi.

S C H O L I V M.

EODEM modo a puncto in sublimi ad subiectū planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum BC, si fieri potest, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, c quæ in vno plano sunt, planum FG, secans planum BC, per rectam GH. Cum igitur AD, AE, rectæ sint ad planum BC, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo ADE. Quod est absurdum: d cum sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.



c 2. vndecimi.

d 17. pri.

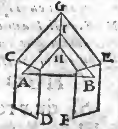
ALITER. Si AD, AE, recta sunt ad planum BC,

ipsa erunt inter se parallela; cum tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum. [a]6. vndecimi.

THEOR. 12. PROPOS. 14. xiiii.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

SIT recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E; [b] & faciant communem sectionem rectam lineam GH; In qua sumpto puncto vtcunque I, ducantur rectę IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. [c] Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.



[b]3. vndecimi.

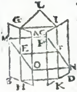
[c]17. pri

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, Videlicet.

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquũ quoque recta erit.

SINT duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea recta EF. Dico EF, rectam quoque esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, faciatque communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK. Eruntque anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF,



IFE, duobus rectis minores. Quare recta EG, FI, ad partes G, I, in plano G K, conueniant, nimirum in puncto L; atque adeo & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; a cum tota recta H G L, sit in uno plano, nempe in AB, producto: Itē tota recta KIL, in vno quoque plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdū, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo si aliud planum, videlicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectas communes cum ipsis sectiones MO, PN, erunt anguli P F E, NFE, recti. Itaque cum EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, recta; b quoque erit EF, ad planum C D, per ipsas ductum. Quod est propositum.

a 1. *undecimi.*

b 4. *undecimi.*

XV.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusque in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex c A, enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano E F, in puncto G. d Deinde in plano E F, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE; e erunt & AB, GH, inter se parallelæ; f Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BA G. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC, g recta quoque erit GA, ad planum B C,



c 11. *undecimi.*
d 31. *pri.*
e 9. *undecimi.*
f 29. *pri.*
g 4. *undecimi.*

per

er ipsas ductum. Est autem & recta ad planum E F, ex onstructione. a Igitur parallela sunt plana B C, E F. Si rgo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes,&c. Quod erat emonstrandum. a 14. vndecimi.

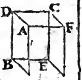
SCHOLIVM.

QVOD si perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta ca'at in ipsummet punctum D, cŏcludetur idem, hoc excepto, uod in plano EF, non sunt ducendæ aliæ parallelæ. Vt si liea GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC; ita vt A G, d planum HI, per GH, GI, ductum perpendicularis, cadat n G; ostendemus, vt prius, GA, esse rectam ad planum BC, per ectas AB, AC, ductum, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema subsequēs. Videlicet,

DATO plano, per datum pun ctum, quod n eo non est, parallelum planum ducere.

DATVM planum sit A B, punctumque extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In lano A B, ducantur vtcunque duæ rectæ D B, DA, se tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur D C. Deinde in plano B C, per rectas DB, DC, ducto, b agatur CE, ipsi D B, parallela. b 31. pri *Et in plano AC, per rectas D A, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, er rectas CE, CF, ductum, parallelum esse plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusque in alio cum illis plano parallelæ sint, c parallela erunt plana A B, EF, er ipsas ducta. Quod est propositum.* c 15. vndecimi.

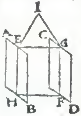


THEOR. 14. PROPOS. 16. xvi.

S I duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SECENTVR plana AB,CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum E H, GF, esse lineas parallelas Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cum sint in plano EF, secante. Conueniant igitur in pũcto I. aQuia ergo tota recta HEI, in vno est plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in vno quoq; est plano, videlicet in CD, producto; cõuenient etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, G F, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secẽtur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 1. vndecimi.



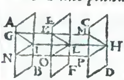
S C H O L I V M.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallela, vt hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones facta ab alio plano secante sunt parallela, parallela sunt, cũ per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci quorum duo tantum sunt parallela, alia vero in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

QVAE eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT duo plana AB, CD, plano E F, parallela. Dico & AB, CD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano G H, sintque communes eorum sectiones recta G I, K L, M H. Secentur rursus alio plano NH, sintque communes eorum sectiones recta NI, OL, P H, hac tamen lege, vt duo plana secantia GH, NH se quoque mutuo secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, secantur plano GH, berunt communes sectiones GI, KL, parallela. Eodem modo parallela erunt MH, KL, c atque adeo pa-

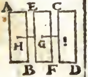


b 16. vndecimi.
c 9. vndecimi.

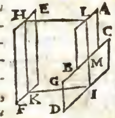
ral-

rallela erunt inter se GI, MH. Non aliter ostendemus, parallelas esse NI, PH. Itaque cum IG, IN, se mutuo tangentes in I, parallela sint rectis HM; HP, se tangentibus in H, existentibusque in alio plano; a erunt plana AB, CD, per ipsas ducta parallela. Quod est propositum. a 15. vndecimi.

ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta est ad planum EF, recta quoque erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, sit recta ad plana AB, CD; b parallela inter se erunt plana AB, CD. Quod est propositum. b 14. vndecimi.



QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficiunt planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantque producta secundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniã igitur parallela sunt plana AB, EF, c erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erũt IM, HK. Quam ob rem cum rectæ LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existãtque in eodem plano secante HI, & conueniant in M; ipsæ erunt in rectum & continuum positæ, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficient; d propterea quod recta LI, in vno iaceat plano. Quod est propositum. c 16. vndecimi. d 1 vndecimi.



ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano,

vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conueniant, vnum planum conficient.

PORRO conuersum quoque propos. 10. facile demonstrabimus hoc loco, videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea una vnius anguli lineę vni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti.



IN planis n. parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, sitque AB, ipsi DE, parallela; & AC, DF, sint ad easdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque esse: hoc est, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum transire etiam per rectam DF; ita vt AC, DF, sint communes sectiones facta à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF,

a16.vn decimi. *ductis. a Hinc enim efficitur, sectiones AC, DF, parallelas esse, quod est propositum. Si namque planum per AC, AD, ductum non facit in illis planis parallelis sectiones AC, DF, faciat sectiones AC, DG, b quæ paralle-*

b16.vn decimi. *læ erunt. c Igitur angulus EDG, angulo BAC, hoc est, angu-*

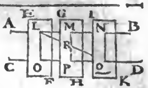
c10.vn decimi. *lo EDF, æqualis erit. quod est absurdum, cum vnus sit totum, & alter pars.*

xvii. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAE lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L

M, N,



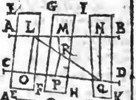
M,N,O,P,Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO,NQ, in planis EF,IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, a quo ad puncta M,P, rectæ ducantur RM,RP, in eodem plano GH, a Eritq; triangulũ LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam vero plana parallela GH,IK, secantur plano trianguli LNQ b erunt communes sectiones eorum MR,NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP,LO. c Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

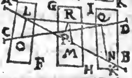
a 2. vndecimi.
b 16. vndecimi.
c 2. sexti.

SCHOLIVM.

QVOD, si data recta AB,CD, sint in vno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM,RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L,O,M, P,N,Q, & per rectas LO, MP,NQ, d *quæ inter se parallelæ erunt, punctumq; R, in recta MP, existet, cum sit & in plano per rectas AB,CD, ducto (propter puncta L,Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM,RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirũ communem sectionem planorum LOQN,GH.*

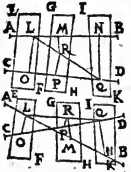
d 16. vndecimi.





SI uero duæ rectæ AB,CD, nõ sint in eodẽ plano, non efficient RM, RP. vnã rectam lineam, ut in hisce duabus figuris apparet: quia e *cum triangulum LOQ, sit in uno plano, & triangulum LNQ, in uno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namque duo illa triangula in vno eodemq; plano existerent,*

e 2. vndecimi.



essent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypotesim.)erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorũ; ac proinde vnam rectam nõ constituẽt; a alias in vno essent plano. quod est absurdum.

21. vndecimi.

EADEM hæc propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc MRP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratum est, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON secus si plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, secẽt, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones mediorũ planorũ & triãgulorum LOQ, LNQ, rectas lineas constituent, si rectæ AB, CD, in vno sint plano, non rectas autem, si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

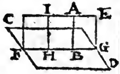
EX demonstratione porro perspicuũ est, si quotlibet lineæ in vno plano existentes secentur quotuis lineis parallelis, segmenta illarum linearũ inter parallelas esse proportionalia. Sint enim duæ rectæ AB, CD, in postrema figura quomodocunque in vno plano dispositæ, quæ secentur tribus parallelis LO, RPM, (Litera enim P, nunc ad intersectionem rectarum CD, RM, pertineat.) QN. Dico segmenta LM, MN, eandem proportionem habere, quam segmenta OP, PQ. Iuncta n. recta LQ, b erit vt LR, ad RQ, ita tam OP, ad PQ, ob triangulum LOQ, quam LM, ad MN, ob triangulum LNQ. Igitur erit, vt OP, ad PQ, ita LM, ad MN. Eademque ratio est de pluribus. Vt autem recte demonstratio procedat in quibusuis duabus rectis, ducenda est recta à primo puncto sectionis vnius rectæ ad vltimum sectionis punctum alterius. Ita vides in duabus AB, CD, ductam esse rectam ex L, primo puncto rectæ AB, ad Q, vltimum punctum rectæ CD. Idemque seruatum est in figuris huius propos. 17.

b 2. sexti

THEOR. 16. PROPOS. 18. xviii.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planū CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineā FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, a ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniā igitur AB, IH, parallelæ sunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; b erit quoque IH, ad idē planū CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad cōmunem sectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similique argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



a 31. pri

b 8. vndecimi.

SCHOLIVM.

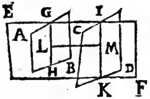
EX his aliud hoc theorema licebit demonstrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.

SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia

sectio-

sectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: a *eademque perpendicularis erit ad I K; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planũ quoque C D, recta erit. Quia igitur L M, ad vtrumque planum AB, CD, recta est,* b *ipsa parallela erunt.*



a 29. primi.

b 14. vndecimi.

SED iam parallela sint plana AB, CD; sitque AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; c *quæ parallelæ erunt. Ducta quoque in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem LM, ad planũ CD, recta quoque erit.* d *Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoque vicissim planum CD, ad planum EF, erit quoque rectũ. Quod est propositũ.*

c 16. vndecimi.

d 18. vndecimi.

HINC etiam problema hoc absoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planũ sit rectũ.

SIT data recta F G. in plano C D, vt in figura huius propos. oporteatque per FG, planum ducere, quod ad planũ CD, rectum sit. Ex quouis puncto B, rectæ FG, e *erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF.* f *quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.*

e 12. vndecimi.

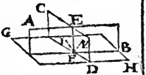
f 18. vndecimi.

xix.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorũ AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, a recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum; sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectũ; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; b ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadẽ ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra c demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



a 24. undecimi.

b 11. pri

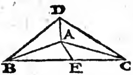
c 13. undecimi.

THEOR. 18. PROPOS. 20. XX.

SI solidus angulus tribus angulis pla-

nis contineatur: Ex his duo quilibet vt vt assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si vero duo tantum sint æquales, & tertius vtrouis minor, cõstat quoq; quoslibet duos reliquo maiores esse. Qđ si vnus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui aũt siue æquales, siue inæquales, manifestũ etiã est, quemlibet horum cũ maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo B A C, maiores quoque esse angulos duos
a23.pri BAD, DAC. In plano. n. per AB, AC, ducto [a] fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ. AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturque rectę BD,



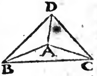
DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quo-
b 4.pri. que ipsis contenti, per constructionem, æquales; [a] erunt
c 20.primi. bases BD, BE, æquales. [b] Quia vero latera DB, DC, maiora sunt latere BC; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quam C E. Cum igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia sint lateribus AB, AC, trianguli BAC; & basis CD, maior base CE; [c] erit angu-
d25.primi. lus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

xxj. OMNIS solidus angulus sub minori-

bus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt cõstituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA. ACD, DCB: D, vero sub CDA, ADB, BDC. a Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores sũt angulo CBD; similiterq; duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erũt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. b Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi, vna cum tribus ad A, æquales sint sex rectis, propter triangula tria BAC, CAD, DAB, (c sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) si auferatur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidũ angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

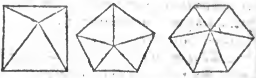


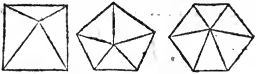
a 20. vndecimi.
b 32. primi.
c 32. primi.

S C H O L I V M.

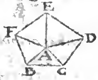
QVONIAM hæc demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus hoc modo.

SIT angulus solidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoque minores. Nam si omnibus angulis planis recta subtendatur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumve, sub quot angulis planis so-





lidus angulus cõprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorum,
a 32.primi. (a cum anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (propterea, quod prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur,
b 20.vndecimi. b & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum angulos eorundem prope basin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.



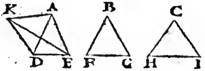
VERVM vt res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus subtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FE, in vno, eodemque plano, in eo videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, secat in punctis B, C, D, E, F; ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulum solidum A.
c 32.primi. c Quia vero omnes anguli quinque triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis BCDEF, æquales sunt sex rectis, nempe decem minus quatuor; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope

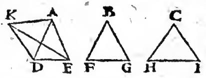
basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, continentur; a erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis aequales sunt decem rectis, vt dictum est. Eadem demonstratio adhibẽda est in aliis omnibus angulis solidis. [a] 20. vndecimi.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxii.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales: fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamẽ lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, b ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ DE, FG, maiores sint, quam HI, ita ostendetur. c Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatq; primũ AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus [b] 22. pri [c] 23. pri



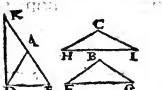


EAD, DAK, compoſitus quod quidem continget, quãdo duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt minores. Ponatur AK, ipſi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia ſunt lateribus BF, BG, triãguli BFG; & anguli ipſis contenti DAK, & B, æquales; [a] erunt & baſes KD, FG, æquales. Rurſus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia ſunt lateribus CH, CI; & angulus EAK, maior angulo C; propterea quod duo anguli DA E, & B, maiores ponuntur angulo C; [b] erit & baſis EK, maior baſe HI: [c] Sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.

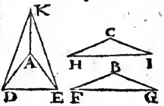
a 4.pri.
b 24.pri
c 20 pri

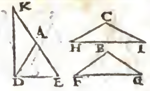
CADAT deinde AK, in rectum & continuũ ipſi AE; quod quidem accidet, quãdo duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturque AK, ipſi AD, æqualis rurſum, & connectatur recta KD. [d] Erit, igitur, vt prius, KD, ipſi FG, æqualis. [e] Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores ſunt recta KE; & KE, æqualis eſt rectis CH, CI, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoque ED, DK, maiores duabus CH, CI: [f] Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quã HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.

d 4.pri.
e 20.pri.
f 20.pri.



CADAT poſtremo AK, ad partes AE, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta ſit EAK; quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt maiores. Ponaturque rurſum AK, ipſi AD, æqualis,

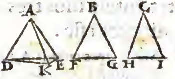




æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. [a] Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, æqualis. [b] Quoniam vero duæ DE, DK, maiores sunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypothesi & cõstructione; erũt quoq; DE, DK, maiores q̃ CH, CI: [c] Hę autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quã HI. Cũ ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. quod est propositum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores esse, quam FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, si angulo C, ad FB, constituatur angulus æqualis, &c. [d] Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonstrandum.

a 4. pri.
b 21 pri.
c 20. pri.
d 22. pri

ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; [e] erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor; [f] erunt quoque duæ illorum bases æquales, [g] & basis tertij vtraque minor: Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliqua.



Quod si unus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales; [h] erit quoque basis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quam FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE, [i] Fiat n. angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturq; AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctũ K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatẽ rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponũtur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli ADK, æqualia sunt lateribus BF, BG,

e 4. pri.
f 4. pri.
g 24. pri
h 24. pri
i 23. pri



trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; [a] erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, triãguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; [b] erit & basis HI, maior base KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: [c] Sed DK, KE, maiores sunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.

a 4. pri.
b 24. pri
c 20. pri

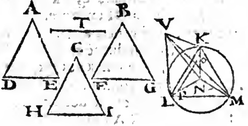
PROBL. 3. PROPOS. 23.

xxiii.

EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturque bases DE, FG, HI. [d] Fieri ergo põt, vt ex DE, FG, HI, triãgulũ cõstituatur. Cõstituatur ex ipsis igitur triangulũ KLM, sitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG;

d 22. vndecimi.

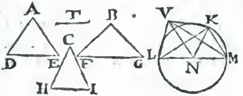


& latus KM, rectæ H I, æquale. e Describatur circa triangulum KLM, circulus, cuius centrum N, a quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe A D, A E, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum K L M; quod quidem fiet, quando triangulum est oxygonium, vt ex coroll. propos. 5. lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quam NK, NL, erunt uel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, trianguli N K L; & basis D E, basi KL, æqualis: b erit angulus A, angulo K N L, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt A D, A E, ipsis N K, NL. Dico quod neque minores. Si enim minores sint A D, A E, quam N K, N L, abscindantur N O, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quoniam igitur est vt NK, ad NO, ita NL, ad N P, cum & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia; erunt latera NK, N L, trianguli N K L, secta proportionaliter; c ac proinde O P, ipsi K L, parallela erit. d Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, N L K, æquales erunt, & triangulum N O P, triangulo N K L, æquiangulum. e Igitur erit vt N K, ad K L, ita N O, ad OP. Est autem NK, maior quam NO. f Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quam OP. Quocirca cum latera AD, AE, trianguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & basis DE, maior base OP, g erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo L N M; & angulus C, angulo MNK, maior esse ostendetur. Cũ igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. prop. 15. lib. 1. erũt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Qđ est absur-

e 5. quar.
b 8. primi.
c 2. sex.
d 29 pri
e 4. sex.
f 14. qu
g 25. pri

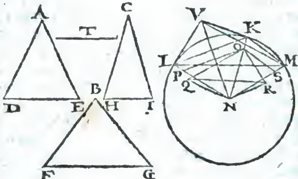
dum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales. Igitur maiores.

CADAT deinde centrum N, in latus LM; quod tum continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum, vt ex eodem coroll. propos. 5. lib. 4. manifestum est. Si igitur AD, AE, dicantur esse æquales ipsis NK, NL; erūt quoque BF, BG, æquales eisdē NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erūt BF, BG, rectæ LM; Posita autē fuit LM, æqualis ipsi FG.



a 20. pri Igitur BF, BG, æquales quoque sunt rectæ FG.[a] Sunt autē & maiores BF, BG, quam FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credantur, quam NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: posita autē fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque

b 20. pri sunt recta FG. Quod est absurdum, [b] cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.

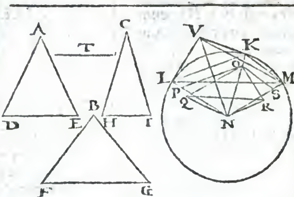


CADAT postremo cētrum N, extra triangulū KLM, infra latus LM, qđ demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, vt ex coroll. dicto propos. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicantur AD,

AE,

AE,esse æquales ipsis NK, NL; cum & basis DE,basi KL, ponatur æqualis;[a] erit angulus A,angulo KNL, æqualis. Eadẽ ratione angulus C,angulo KNM,æqualis erit.Quare totus angulus LNM,angulis A,& C,æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi,angulo B.Igitur & angulus LNM,angulo B,erit maior.Rursus quia latera NL, NM,trianguli NLM,æqualia sunt lateribus BF,BG, trianguli BFG, & basis L M , basi FG , æqualis; [b] erit angulus LNM,angulo B,æqualis. Sed & maiorem ostendimus esse.Quod est absurdum.Nõ igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL . Quod si AD,AE, credantur esse minores, quam NK,NL;si abscindantur NO,NP, ipsis AD, AE, æquales,& ducatur recta OP;demonstrabitur,vt in primo casu,angulus A,maior angulo ONP;& eadem ratione angulus C,maior angulo KNM.[c] Fiat angulus ONQ,angulo A;& angulus ONR,angulo C,æqualis, ponanturq; NQ, NR, æquales ipsis AD , AE , & connectantur OQ, OR; cadetque OQ, infra OP , propterea quod per puncta O,P,Q,transit circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO,descripta,cum æquales sint rectæ NO , NP, NQ.[d] Quare cũ angulus PON, æqualis sit angulo I KN, externus interno ; erit angulus QON , minor angulo L K N. Eadem ratione ostendetur angulus NOR,minor angulo NKM,si ducatur OS,parallela ipsi KM . Cadet n. similiter OR,infra OS.Igitur totus angulus L K M , toto angulo QOR,maior erit.Quoniam vero latera NO,NQ. trianguli NOQ,æqualia sunt lateribus AD,AE,trianguli ADE;Est autem & angulus ONQ,angulo A,æqualis,per constructionem;[e] erit OQ,ipsi DE,hoc est,ipsi KL,æqualis.Eodem modo erit OR,ipsi KM,æqualis.Connexa iam recta QR,cum latera KL,KM,trianguli LKM , æqualia sint lateribus OQ,OR,trianguli OQR;& angulus LKM, maior angulo QOR,vt ostendimus: [f] erit basis L M , hoc est,FG,maior base QR . Quoniam igitur latera BF , BG, trianguli BFG,æqualia sunt lateribus NQ NR, trianguli NQR;& basis FG,maior base QR; [g] erit angulus B, maior angulo QNR.Rursus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR,angulo C,factus est æqualis,erit angu-

a 8.pri.
b 8.pri.
c 23.pri
d 29.pri
e 4.pri.
f 24.pri
g 25.pri



lus totus QNR, duobus A,& C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B Quod est absurdum, cum B, ostensus sit maior angulo QNR. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores sint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, existat; possit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propos. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, & T. [a] Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quoniã igitur NV, recta est ad planum circuli KLM, recta quoque eadem erit, ex defi. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM; [b] ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale sit ex cõstructione, eisdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK. & AD. Ac propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK. æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & anguli ipsis contenti VNK, VNL, recti; [c] erit basis VK, æqualis basi VL; Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectę VK, VL, VM, æquales sunt rectę AD, & ob id, rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamobrem, cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia sint lateribus AD, AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE; [d] erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus,

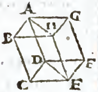
a 11. vndecimi.
b 47. primi.
c 4. pri.
d 8. pri.

angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

THEOR. 21. PROPOS. 24. xxiiii.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma similia, & æqualia. Cũ enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC; a Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC; parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. a 16. vndecimi.



Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis; b erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. b 10. vndecimi.
c Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea vt BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris AH, DE, d cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint late- c 34. primi. d 34. pri

a 10.vn decimi. ribus DC,CE,trianguli DC E; [a] & angulus ABH, angulo DCE,æqualis,vt oftenfum eft; [b] erunt triangula ABH,
b 4.pri. DCE,æqualia inter fe.[c] Quare cũ triangula ABH, DCE,
c 34.pri. dimidia fint parallelogrammorum BG, CF; erunt parallelogramma BG,CF, inter fe æqualia. Similiter demonftrabimus fimilia & æqualia effe parallelogramma oppofita A C, GE;& AF,BE.Si folidum ergo parallelis planis contineatur,aduerfa illius plana, parallelogramma funt, fimilia,& æqualia.Quod erat demonftrandum.

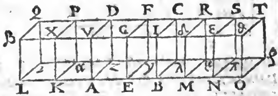
XXV. THEOR. 22. PROPOS. 25.

SI folidum parallelepipedum plano fecetur aduerfis planis parallelo: Erit quemadmodum bafis ad bafim, ita folidum ad folidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD,plano EF,parallelo oppofitis planis AD,BC.Dico vt eft bafis AG,ad bafin BG,ita effe folidum AEFD,ad folidum BEFC.Intelligatur enim parallelepipedum A B C D, productum in vtramque partem quantumlibet, fumanturque in AB, protracta quotcunque rectæ AK,KL,ipfi AE; & quotcunque rectæ BM,MN,NO,ipfi EB,æquales.Deinde per puncta K,L,M,N,O,ducantur plana KP,LQ,MR,NS, OT,parallela planis AD,EF,BC, per fcholium propof. 15. huius lib.Quoniam igitur folidum AEFD, cõtinetur planis parallelis ex hypothefi;ipsũ parallelepipedũ erit, ex defi
d 24. vn nitione,[d] habebitq; plana oppofita, parallelogrãma fimi
decimi. lia,& æqualia.Eodẽ modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP;EBCF,BMRC,MNSR;NOTS;ELQF,EOTF; habebuntq; plana oppofita,parallelogramma fimilia, & æ-
e 36.pri qualia [e] quoniã vero parallelogrãma AG,KV,LX,cũ fint fuper æquales bafes AE, AK, KL, æqualia funt;& fimilia
f 29.pri quoque, [f] cum anguli vnius fint æquales angulis alio-

rum,& latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportionalia. Eademque ratione æqualia & similia sunt parallelogrãma AY,KZ,Lα. Cum igitur æqualia quoque sint,& similia parallelogramma AD,KP,LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, solidi AEFD, æqualia,& similia tribus planis KV,KZ,KP, solidi AKPD,& tribus planis LX,Lα, LQ, solidi KLQP: a Sunt autem tria in vnoquoque solido æqualia,& similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe AG, ipsi ZF;& AY, ipsi VF;& AD, ipsi EF,&c Igitur per defin.10.huius lib. æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia ostendentur solida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex est basis LG, basis AG, tam multiplex erit solidum LEFQ, solidi AEFD; Et quam multiplex est basis OG, basis BG, tam multiplex erit solidum OEFT, solidi BEFC. Quoniam vero si basis LG,(multiplex basis AG, primæ magnitudinis,) æqualis est basi OG, (multiplici basis BC, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum LEFQ, (multiplex solidi AEFD, tertiæ magnitudinis) solido OEFT, (multiplici solidi BEFC, quartæ magnitudinis.) propterea quod basibus LG,OG æqualibus existẽtibus, æqualia quoque sunt & similia sex parallelogramma solidi LEFQ, sex parallelogrammis solidi OEFT: Si autem basis maior est base, solidum quoque solido maius est;& si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin.6.lib.5. vt basis AG, prima magnitudo, ad basin BG, secundam magnitudinem, ita solidum AEFD, tertia magnitudo, ad solidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, vt est basis DY, ad basin CY,& vt basis AY, ad basin BY, & vt basis DG, ad basin CG. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur,&c. Quod erat ostendendum.

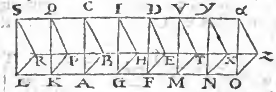
a 24. vndecimi.



SCHO-

SCHOLIVM.

HAEC propositio accommodari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo: erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidũ. Sit enim primo prisma ABCDEF. cuius plana aduersa sint triãgula ABC, DEF, seceturq; plano GHI, aduersis planis parallelo. Dico vt est basis AI, ad basin FI, ita esse solidum ABCIHG, ad solidum FEDIHG, Intelligatur enim prisma ABCDEF, in vtramque partem quantumlibet productum, & ex AF, protracta vtrinque capiantur quotcunque rectæ AK, KL, ipsi

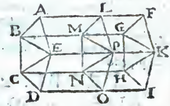


AG; & quotcunque rectæ FM, MN, NO, ipsi FG, æquales.
Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ,
LRS, MTV, NXY, OZα: parallela planis ABC, GHI, FED,
per scholium propos 15. huius lib. Quoniam igitur plana pa-
a16.vn rallela ABC, GHI, secantur plano AI, [a] erunt communes
decimi. sectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI. paralle-
læ ex hypotesi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelo-
grammum est AI. Rursus quia plana parallela ABC, GHI,
b16.vn secantur plano AH; [b] erunt communes sectiones AB, GH,
decimi. parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelo-
grammum AE. Igitur parallelogrammum est AH. Eodem
modo parallelogrammum ostendetur CH. Quoniam vero
latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus GI,
c34.pri GH, trianguli GHI; [c] cum AC ipsi GI, & AB, ipsi GH, sit
d10vn æquale: [d] & anguli CAB, IGH, sunt quoque æquales, eo
decimi. quod rectæ CA, AB, parallelæ sunt rectis IG, GH, & non in
e4. pri. eodem plano; [e] Erunt triangula ABC, GHI, æqualia inter
f5.sexti se, & æquiangula. [f] Quare latera circa æquales angulos pro
portionalia habebunt: Atque idcirco similia erunt. Igitur solidum ABCIHG, contentum duobus planis oppositis ABC, GHI, æqualibus & similibus, atque parallelogrammis AI, IB, BG, prisma est. Eadem arte prismata erunt ABCQPK,

KPQ-

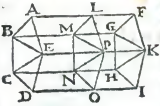
KPQSRL, FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO, LRSIHG, OZαIHG. Quoniam vero parallelogramma AI, KC, LQ, æqualia sunt, & similia; necnon AH, KE, LP, & CH, QB, SP; erunt omnia plana prismatis ABCIHG, æqualia & similia omnibus planis prismatũ ABCQPK, KPQSRL. Quare, per defi. 10. huius lib. æqualia erũt prismata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO. Quare quã multiplex est basis LI, basis AI, tã multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG, & quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma PZαIHG, prismatis FEDIHG. Quia vero si basis LI, (multiplex basis AI, primæ magnitudinis) æqualis est basi OI, (multiplici basis FI, secũdæ magnitudinis.) æquale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis,) prismati OZαIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quartæ magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus æqualibus, æqualia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZαIHG: Si autem basis LI, maior est base OI, prisma quoque prismate maius est, & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinẽ, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, vt est basis AH, ad basin FH, & vt basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sit polygona, nempe pentagona, seceturque plano LMNOP. Dico rursus vt est, basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resoluantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata; quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit vt basis BP, ad basin



MK,

MK, ita prisma ABEPML, ad prisma L M P KGF, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit vt basis CP, ad basin N K, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI. a *Vt autem BP, ad MK, & CP, ad N K, ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, vt CN, ad NH: & vt CN, ad NH, ita est C M, ad N G. Igitur prismata ABEPML. B CEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF. MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad N G, ac proinde eandem inter se.* b *Vt autem vnum ad vnum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit vt prisma BCEPMN, ad prisma M N P-K G H, hoc est, vt basis C M, ad basin N G, ita prisma A B C D E L M N O P: ex tribus compositum ad prisma L M N O P F G H I K, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate.*



a 1. sexti

b 12. quinti

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demõstratione, qua vsi sumus in prismate habẽte plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in vtramque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia, c *propterea quod latera eorum sunt parallela, nempe cõmunes sectiones parallelorũ planorum,* d *ac proinde angulos æquales comprehendunt, &c. Vnde, vt prius, ostendetur prismata ex vna parte inter se æqualia, necnon & prismata ex altera parte, &c.*

c 16. vndecimi.
d 10. vndecimi.

C O R O L L A R I V M.

EX his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est in priori prismate, triangulũ GHI, æquale esse & simile triangulo A B C, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

xxvi.

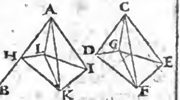
PROBL. 4. PROPOS. 26.

AD datam rectam lineam, eiusque pun-

ctum

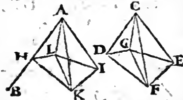
ctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta A B, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodẽ plano existentibus. a Ducatur ex F, ad planum per CD, CE, ductum perpendicularis F G, connectanturque rectæ D F, D G, EF, E G, C G. Deinde abscindatur A H, æqualis ipsi C D, b fiatque angulus H A I, angulo D C E, æqualis; & recta A I, rectæ C E, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ductũ constituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ C G, æqualis. c Ex L, vero ad planum, in quo sunt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis L K, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & coniungatur recta KA. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cum latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per constructionem; d Erũt bases H L, D G, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus H A I, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cum igitur & latera A L, A I, trianguli ALI, æqualia sint lateribus C G, C E. trianguli C G E, per constructionem; e æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & anguli HLK, DGF, recti ex defin. 3. huius lib. f erunt & bases HK, DF, æquales. Quare cum & latera AH, AK, trianguli AHK, sint æqualia lateribus C D, C F, trianguli CDF, ex constructione. (cum enim AL, LK, latera latrribus CG, GF, æqualia sint ex cõstructione. cõprehendantq; angulos æquales, nimirũ rectos, ex defin. 3. huius lib: g erunt bases AK, CF, æquales.) h Erunt quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera L I, LK,



a 11. vndecimi.
b 23. pri
c 12. vndecimi.
d 4. pri
e 4. pri.
f 4. pri.
g 4. pri.
h 8. pri.

sunt æqualia lateribus GE,GF,& anguli ILK,EGF,recti
a 4. pri. ex defin.3.huius lib.a Erunt bases IK, EF,æquales: Cum igitur & latera AI,AK,trianguli AIK,lateribus CE, CF,
b 4. pri. trianguli CEF,sint æqualia ex constructione;b Erunt quoque anguli IAK, ECF,æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI,HAK, KAI, solidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE,DCF,FCE,angulum

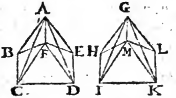


solidum C, componentibus; Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam,eiusque punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis,quam tribus,subtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in vno eodemque existentes plano (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita vt figuram planam polygonam constituant,pyramisque quædam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula resoluuntur, habebuntur tot pyramides trilateræ,quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur,constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC,CAD,DAE,EAF,FAB, constituendus sit solidus angulus æqualis, subtendendæ sunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB,vt fiat pentagonum BCDEF, quod in



tria triangula resoluatur BCF, FCD,DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF,FAB, constituendus solidus angulus

æqua-

æqualis G, contẽtus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A. contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK; Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.

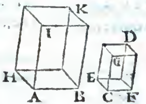
PROBL. 5. PROPOS. 27. xxvii.

A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT a data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD. a Fiat ad rectã AB, eiusque punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis ECG, GCF, FCE. Deinde vt est CF, ad CG, b sic fiat AB, ad AI, & vt CG. ad CE, ita AI, ad AH, eritque ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH, Post hæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela sint parallelogrammis BH, HI, IB Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, simile esse similiterque positum. Cum enim anguli BAH, FCE, sint æquales. & latera circa ipsos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex constructione, erunt parallelogramma HB, EF, similia, similiterque posita. Eadem ratione similia erunt, similiterque posita parallelogramma HI, EG, & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, solidi AK, similia sunt, similiterque posita tribus planis FE, EG, GF, solidi CD. c Sunt autem tria cuiuslibet

a 26. vndecimi.

b 12. sexti



c 24. vndecimi.

bet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi AK, similia sunt, similiterque posita sex planis solidi CD; Ac proinde ex defi. 9. huius lib similia sunt, similiterque posita solida AK, CD. A data ergo recta linea dato solido parallelepipedũ simile, & similiter positum descripsimus, Quod erat faciendum.

xxviii.

THEOR. 23. PROPOS. 28.

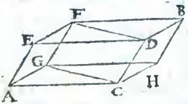
SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIT parallelepipedum A B, in quo plana opposita sint AH, EB, qoorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela

34. pri est,a & æqualis ipsi AE, cum sint parallelogramma C E,

b9. vndecimi, GE; b erunt & inter se parallelæ, & æquales CD, GF, d Ac

c33. pri proinde, quæ ipsas coniungunt C G, DF, parallelæ erunt & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum



d24. vndecimi. AB. d Cum enim plana A H, EB, sint parallelogramma çqualia, & similia; erunt dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter se: sunt autem & latera circa angulos æquales

e6. sexti GAC, CHG, FED, DBF, proportionalia. e Igitur similia

f 24. vndecimi. quoque erunt dicta trangula. f Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelogrammo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prismatis

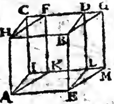
ACG-

ACGFED, æqualia & ſimilia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, priſmatis HGC-DBF; proptereaq; priſmata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, ſectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 24. PROPOS. 29. xxix.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin cõſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis: ſunt inter ſe æqualia.

SVPER baſin AB, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum inſiſtentes lineę ex quatuor angulis baſis exeuntes in iiſdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelelepeda ACDE, AFGE, eſſe inter ſe æqualia. a Cũ. n. æqualia ſint parallelogramma AL, AM, ſuper eadẽ baſi AE, & in eiſdem parallelis conſtituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoque triangula AIK, ELM. b Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia ſunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propoſ. lib. 1. oſtendimus; c Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter ſe erunt ſimilia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & ſimile. d Rurſus parallelogrammum AC, æquale eſt & ſimile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammũ AF, parallelogrammo EG: e Sed & IF, ipſi LG, cum baſes IK, LM, ſint æquales (f Nam cum rectæ, IL, KM,



a 35. pri

b 34. pri

c 4. ſexti

d 24. undecimi.

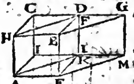
e 36. pri

f 34. pri

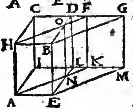
æquales ſint ipſi AE, erunt quoque inter ſe æquales: quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana priſmatis AIKFCH, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta priſmata; Ac propterea addito communi ſolido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

HAEC propoſitio perſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrãmis, hoc de parallelepipedis demonſtratur hoc loco, eiſdem fere medijs, dummodo loco triangulorum aſſumantur priſmata, vt ex demonſtratione liquet. Vnde reliqui duo caſus, quando nimirum punctum K, in pũctum L, cadit; vel vltra L, eodem modo demonſtrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in ſecundo caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula AIK, ELM, æqualia. Vnde vt prius, æqualia erunt priſmata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo priſmate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.



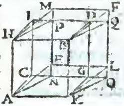
IN tertio vero caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, dematur triangulum commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus ſi addatur triãgulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, vt prius, æqualia erunt priſmata AIKFCH, ELMGDB, à quibus ſi auferatur priſma cõmune KLNODF, (Nam communis ſectio planorum AF, DE, eſt recta NO.) remanebit ſolidum comprehenſum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale ſolido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique priſma commune AENOBH, fiunt parallelepipeda ACDE, AFGE, inter ſe æqualia.



THEOR. 25. PROPOS. 30. XXX.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SVPER basin AB in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD, protractæ transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ; &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia. Cum enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, easdem in punctis P, Q; adiunganturque rectæ AN, KO, HP, BQ. a Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB. b Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales; ideoque parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQK. c Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cum vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cum vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallepipeda AIDK,



a 34. pri

b 33. pri

c 29. pri

AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basim, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propositio, atque precedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdẽ collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si vnum dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedũ in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum, & reliquum. a Cum igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

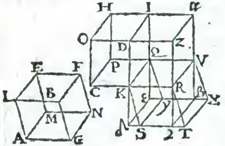
a 29. vel 30. vndecimi.

xxxi. xxxii.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

SVPER æquales bases AB, CD, in eadem altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CH IK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primum insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, K Q, O H, DI, ad basin C D, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictę perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur CK, in rectum, sitque K R, æqualis ipsi L B, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso æqualis angulo BLA, ponaturque K S, æqualis ipsi LA; & perficiatur parallelogrammum K T, super



quod

quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, construatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & similia; Rursus quia latera KQ, KS, æqualia sunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG, erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & similia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia sint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & similia. [a] Quare cum tria plana, KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia sint & similia; [a] tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG, [b] tam autem illa, quam hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter se æqualia. a 24. vndecimi. b 24. vndecimi.

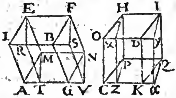
CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in δ; & IQ, XY, in ι, compleaturque parallelepipedum Q$\delta\gamma$V. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IkRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Q$\delta\gamma$V, eandem habent basin KV, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & insistentes ipsorum lineæ KS, Kδ, RT, Rγ, QY, Qι, VX, Vβ, collocantur in eisdem rectis δT, ιX, [c] ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Q$\delta\gamma$V. c 29. vndecimi.

[d] QVONIAM vero parallelogramma KT, Kγ, æqualia sunt inter se; & KT, æquale est ipsi LG, erit & Kγ, ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale; cum bases LG, CD, ponantur æquales. [e] Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR: [f] Vt autem CD, basis ad basin DR, ita est solidum CHIK, ad solidum KIαR; cum parallelepipedum CHαR, secetur plano IK, planis oppositis CH, αR, parallelo: Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita est solidum Q$\delta\gamma$V, ad solidum IKRα; cum & parallelepipedum I$\delta\gamma\alpha$, secetur plano KV, oppositis planis D$\alpha\delta\beta$, parallelo. [g] Igi- d 35. primi. e 7. quinti. f 25. vndecimi. g 9. quinti.

tur æqualia erunt parallelepipeda C H I K, Qδγ V, cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRα, nimirum eandem, quam habent bases æquales C D, Kγ, ad eandem basin D R. Quare cum parallelepipedum Qδγ V, sit ostensum æquale parallelepipedo A E F G; æqualia quoque erunt parallelepipeda A E F G, C H I K. Quod est propositum.

SINT iam neque insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ab basin AB, neque CP, KQ, OH, DI, ad basin C D, perpendiculares: a Et a punctis E, F, M, N, demittantur E R, F S, M T, N V, ad planum, in quo basis A B, perpendiculares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo basis C D, perpendiculares H X, I Y, P Z, Qα. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda E T V F, HZα I, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, vt ostensum est. b Sed parallelepipedum E T V F, æquale est parallelepipedo A E F G, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum H Z α I, æquale est eadem ratione parallelepipedo C H I K; cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda A E F G, C H I K. Idemque ostendetur, si vnius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

a 11. vndecimi.

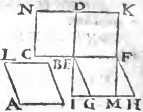


b 29. vel 30. vndecimi.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine cõstructione tot parallelepipedorum, quamuis ea-

dem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma A B, C D. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases A B, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera D E, C E,



ad partes E. Deinde fiat angulus F E G, æqualis angulo L; & recta E F, rectæ L B, & recta E G, rectæ L A, ponatur æqualis; perficiaturq; parallelogrammum E H, quod æquale erit, & simile parallelogrammo AB. Conueniat autem H G, producta cum D E, producta in I, & compleatur parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur super bases EH, IF, EK, constituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallepipedis super A C, C D, constructis; sintque insistentes lineæ perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super EH, æquale esse ac simile solido super AB, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia sint & similia planis huius, per constructionem: a Sunt autem & æqualia parallelepipeda super EH, IF, cum habeant basin eãdem, cuius infimum latus EF, erectam super planum IK; Item plana basi opposita, quorum latera infima GH, IM, in eodem plano, cuius infimum latus I H, atque insistentes lineas EG, FH, EI, FM, &c. in eisdem rectis lineis I H, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum super I F, parallelepipedo super AB. b Quoniam vero parallelogramma E H, I F, æqualia sunt; & E H, æquale est ipsi C D: æqualia erunt IF, CD. c Erit igitur, vt IF, ad EK, ita CD, ad EK; d Est autem vt IF, ad EK, ita solidum super I F, ad solidum super EK, quod solidum super IK, secetur plano super EF, erecto parallelo planis super DK, IM, erectis. Et eadem ratione, vt CD, ad E K, ita solidum super C D, ad solidum super EK, cum solidum super CK, secetur plano super DE, erecto parallelo planis super CN, F K, erectis. Quare erit vt solidum super I F, ad solidum super E K, ita solidum super CD, ad solidum super EK, e Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda super I F, & C D. Ostensum est autem parallele-

a 29 vndecimi.
b 35. pri.
c 7. qn.
d 25. vndecimi.
e 9. qn.

pipedum super IF, æquale parallelepipedo super AB. Aequalia ergo erunt & parallelepipeda super A B, C D. Quod est propositum.

CONVERTETVR quoque hæc propos. 31 in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine; super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin.

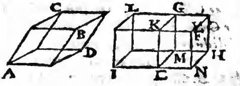
SI enim vnum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine,
a 31. vn decimi. *a fient æqualia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.*

QVOD si in eadem sint altitudine, & basis vnius credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis æqualis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedũ eiusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo partem toti esse æqualem. Quod est absurdum.

xxxiii. THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases.

SINT duo parallelepipeda A B C D, E F G H, eiusdem altitudinis super bases AB, EF. Dico esse solidum ad solidum, vt est basis ad basin.
b 45. pri b Super rectam enim E K, construatur parallelogrammum I K, æquale parallelogrammo A B, in angulo I E K, qui sit æqualis angulo E N F. Constituent autem parallelogramma E F, IK,



IK,totum parallelogrammum vnum FI,vt in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH producantur ad partes EG,perficiaturque totum vnum parallelepipedum IFLH; [a] erunt parallelepipeda ABCD,IKLM,æqualia, cum habeant æquales bases,per constructionem AB, IK, & eandem altitudinem, ex hypothesi. [b] Quare erit vt solidum IKLM, ad solidum EFGH,ita solidum ABCD, ad idem solidũ EFGH: [c] Est autem solidum IKLM,ad solidum EFGH,vt basis IK,hoc est,illi æqualis basis AB,ad basin EF. Igitur & solidum ABCD,erit ad solidum EFGH, vt basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt,vt bases. Quod erat demonstrandum.

a 31. vndecimi.
b 7. quinti.
c 25. vndecimi.

SCHOLIVM.

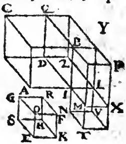
CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint,vt bases;ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori æqualis,& ducatur planum basi parallelum, [d] *eritque vt basis ad basin,ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum:sed sic quoque erat ad totum.* [e] *Abscissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.*

d 32. vndecimi.
e 9. quinti.

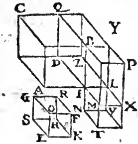
THEOR. 28. PROPOS. 33. xxxvj.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda ABCD,EFGH, super bases similes AB, EF, in quibus latera homologa sint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD,ad parallelepipedum EFGH, esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI,EK. Producatur enim AI,ad L,& sit IL,æqualis ipsi EK,vel GR; Item DI, ad M, & sit IM,æqualis ipsi HK, vel GO; Item BI,ad N,& sit IN,æqualis ipsi KF, vel GS. Deinde



cōpletis parallelogrāmis LM,LN,IT,perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL,IM, æqualia
a 15. pri sunt lateribus GR, GO; [a] & anguli contenti æquales, cum angulus LIM, sit æqualis angulo AID, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo EKH, seu RGO; erunt parallelogrāma IX, GF, similia, & æqualia. Eadem ratione similia erunt, & æqualia LN, kS; item IT, GE. Quare tria plana IX,LN, IT, parallelepipedi TXIV, similia sunt, & æqualia tribus planis G F,



b 24. vn decimi. RS, GE, parallelepipedi EFGH: [b] Sunt autem tria cuiusque similia, & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10. huius lib. Rursus completis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepipedum MPBL; Item completis parallelogrāmis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorum ABCD, EFGH, est vt AI, ad EK, hoc est, ad IL, ita DI, ad HK, hoc est, ad IM; & BI, ad FK, hoc est, ad IN. [c] Vt
c 1. sex. autem AI, ad IL, ita est parallelogrammum AD, ad DL; Et vt DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM; & vt BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit vt AD, ad DL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. [d] Sed vt
d 32. vn decimi. AD, basis ad DL, basin, ita est parallelepidedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & vt basis DL, ad basin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP; & vt basis BL, ad basin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, vt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedū LNTX. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoq; proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc est, ad EFGH, erit triplicata ꝓportionis primæ ADCB, ad secundā DLYQ,

ex defin. 10. lib. 5.[a] Vt autẽ ADCB, ad DLYQ, ita est basis AD, ad basin DL;[b] Et vt AD, ad DL, ita est recta AI, ad IL, hoc est, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, est triplicata proportionis homologorum laterum; nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sũt in triplicata ratione homologorũ laterum. Quod erat demonstrandum.

a 32. vndecim. i.
b 1. sex.

COROLLARIVM.

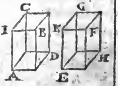
EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

THEOR. 29. PROPOS. 34.

xxxiiii. xxxv?

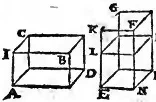
AEQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Illa sunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, super bases AD, EH. Dico bases AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, esse reciprocas, hoc est, esse vt AD, ad EH, ita altitudinem solidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primam insistentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad bases AD, EH, ita vt AI, EK, sint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, sunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & bases AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propos. 31. huius lib. ostendimus. Quare erit, vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocæ.



QVOD si altitudines AI, EK, inæquales fuerint; sit EK, maior, ex qua abscindatur EL, ipsi AI, æqualis;

& per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH, per scholium propos. 15. huius lib.



Quoniam igitur æqualia sunt solida ADCB, EHGF; [a] erit vt ADCB, ad solidum EHML, ita EHGF, ad idem solidum EHML: [b] Vt autem solidum ADCB, ad solidum EHML, ita est basis AD, ad basin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL. Et vt solidum EHGF, ad solidũ EHML, ita est eadem ratione basis KM, ad basin LN, cum hac ratione solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt basis AD, ad basin EH, ita basis KN, ad basin LN: [c] Sed vt KN, ad LN, ita est recta EK, ad rectam EL, hoc est, ad AI, ipsi EL, æqualem. Quare erit vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ sunt bases, & altitudines.

a 7. quinti
b 32. vndecimi.
c 1. sex.

SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales; cum sit basis AD, ad basin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypothesi; erunt & bases AD, EH, æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se æqualia erunt.

d 31. vndecimi.

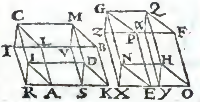
QVOD si altitudo EK, maior fuerit, abscindatur EL, ipsi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH. Quia igitur ex hypothesi est, vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc est, ad EL, ipsi AI, æqualem; [e] Vt autem basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur, [f] Et vt EK, ad EL, ita est KN, ad LN; [g] Vt autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum EHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit vt solidum ADCB, ad solidum EHML, ita

e 32. vndecimi.
f 1. sexti
g 32. vndecimi.

solidum

ſolidum EHGF,ad idem ſolidum EHML; [a] ideoq; æqualia erunt ſolida ADCB,EHGF. [a] 9. quinti

SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH,æqualia,quorum inſiſtentes lineæ AI,KD, BM, LC;EN,OH, FQ, PG,non ſint perpẽdiculares ad baſes AB , EF. Demittantur autem a punctis I, D, M, C,ad planũ baſis AB, perpendiculares IR,DS,MV,CT; Item a punctis N,H,Q,G, ad planum baſis EF,perpendiculares NX, HY, Qα, GZ; connectanturque rectæ RS,TV,RT,SV; XY,Zα,XZ,Yα: Eruntque perpendiculares RI,XN, parallelepipedorum altitudines,ex defin.4.lib.6. Dico rurſus, vt baſis AB, ad baſin EF,ita eſſe altitudinem XN,ad altitudinem RI. [b] Cũ enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH,ex hypotheſi, [c] ſit autem ABCD,æquale ſolido RVCD , quod habeant eandem baſin CD,eandemq; altitudinem RI ; & EFGH, eadem ratione,æquale ſolido XαGH: Erunt & parallelepipeda RVCD, XαGH, æqualia. Quare cũ habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD,GH;erit, vt iam demonſtratum eſt,vt baſis CD, ad baſin GH,hoc eſt, vt baſis AB,ad baſin EF,ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ. [b] 29. vel 30. vndecimi.



SINT iam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Conſtructa enim figura, vt prius;Cum ſit vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI; [d] Sit autem AB, ipſi CD , & EF, ipſi GH,æqualis;erit quoque vt baſis CD, ſolidi RVCD, ad baſin GH,ſolidi XαGH, ita altitudo XN , ad altitudinem RI. Quare cum XN,RI,ſint inſiſtentes lineæ perpendiculares ad baſes CD,GH;erunt,vt iam oſtenſum eſt,æqualia parallelepipeda RVCD,XαGH. [e] Sunt autem hæc parallepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur æqualia quoque erunt parallelepipeda ABCD, EFGH. Idemque oſtendetur,ſi inſiſtentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad baſin, alterius [d] 24. vndecimi. [e] 29. vel 30. vndecimi.

vero

vero non. Quam ob rem, Aequalium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33 & 34. conueniunt quoque prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædictæ hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, vel æquales bases existentia. a *Quare æqualia erunt eiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.*

a 29. 30. vel 31. vndec.

RVRSVS, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis adijciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. b *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt basis ad basin;* c *Atque adeo prisma ad prisma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem basis ad basin, si prismatum bases fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triãgula.*

b 32 vndecimi.
c 15. quinti.

PRAETEREA, si duobus prismatis præfatis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituentur duo parallelepipeda similia, d *quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia,* e *cũ eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum.*

d 33. vndecimi.
e 15. quinti.

DENIQVE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, compo-

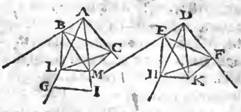
nentur

uentur duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinū tum prismatis.[a] Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocæ; & bases prismatum eædem sint, vel certe triāgula earum dimidia [b] eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciprocæ. [a] 34. vndecimi. [b] 15. qu

THEOR. 30. PROPOS. 35. xxxvii.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorū verticibus sublimes rectæ lineæ insistant; quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpēdiculares; a punctis vero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctę fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

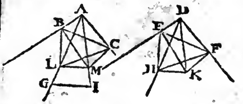
SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D. insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus



CAG, angulo FDH, sit æqualis: a sumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demittantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, existunt, perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, esse æquales inter se. Nam si A G,

DH,

DH, sunt inæquales auferatur a maiori AG, ipsi DH, æqualis linea AL, & ex L, in plano triãguli AGI, ducatur ipsi GI, parallela LM. Quoniam igitur parallelæ sunt GI, LM, & est GI,



b 8. vndec. ad planum anguli BAc, recta; a erit quoque LM, ad idem planum recta. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF, & connectantur rectæ BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta est ad planum anguli BAC, ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per

b 47. pr. c 47. pr. defin. 3. huius lib. b Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML; c Est autem quadratũ rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus sit, ex constructione. Quadratum

d 47. pr. ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CM, ML: d At quadratis rectarum CM, ML, æquale est quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus sit per de-

e 48. pr. fin. 3, huius lib. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est

f 47. pr. quadratis rectarum AC, CL; e Ac proinde angulus ACL,

g 47. pr. rectus erit. f Rursus quia quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AM, ML: g Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per constructionem, sit rectus. Igitur qua-

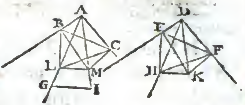
h 47. pr. dratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BM, ML; h At quadratis rectarum BM, ML, æquale est quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, sit rectus ex

i 48. pr. defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BL; i propterea que angulus ABL, erit rectus. Non aliter ostendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, triangu-

k 26. pr. li ABL, æquales sunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; suntque latera AL, DH, æqualia; k Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, equalia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH.

Quare

Quare cũ latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE,DF,trianguli DEF; & anguli contenti BAC,EDF, ęquales, ex hypotheſi; [a] erunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB,angulis DEF,DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM,ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales;cum omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB,reliquis angulis KEF,KFE,æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC,EF,ſint oſtenſa æqualia; [b] erunt latera BM,CM,lateribus EK,FK, æqualia.Quia igitur latera AC.CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtēſa lateribus DF,FK, trianguli DFK, & anguli ACM, DFK, ſunt recti;[c] erunt & baſes AM,DK,inter ſe æquales. Cum autem æquales ſint oſtenſæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia:[d] Quia vero quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH,quadratis rectarum EK,KH,quod anguli BML, EKH,recti ſint,ex defin.3.huius lib.Erunt & quadrata rectarum BM,ML,æqualia quadratis rectarum EK,KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM,EK,quæ æqualia ſunt, quod rectæ BM,EK,oſtenſæ ſint æquales;reliqua quadrata rectarum LM,HK,æqualia erunt;ac proinde rectę LM, HK,æquales,Quam ob rem cum latera AL,AM, trianguli ALM,æqualia ſint lateribus DH,DK,trianguli DHK,& baſis LM,baſi HK,æqualis;[e] erunt & anguli LAM,HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat.



a 4. pri.
b 26. pri.
c 4. pri.
d 47. pri.
e 8. pri.

COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique. Erunt a punctis extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe ęquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales

& sublimes æquales A L, D H, constituunt angulos æquales L AB, HDE. Item LAC, HDF: demonstratum fuit, demissas perpendiculares LM, HK, esse æquales.

xxxviii

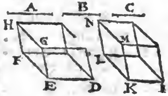
THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterũ quidem sit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continue proportionales rectæ A, B, C. Cõstituaturque angulus solidus E, ex tribus angulis planis quibuscunque DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipsi A; & EF, ipsi B; & EG, ipsi C, sit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH: quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipsis fieri. a Deinde ad rectam IK, eiusque punctum K, fiat solidus angulus K, æqualis solido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales sint tribus DEF, DEG, FEG, ita vt rectę IK, KL, KM, æquales sint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN, quod contineri dicitur sub linea B, se ex ipsa describi. Dico solidum DH, æquale esse solido IN. Cum enim sit vt DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipsi A; & IK, KM ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: b Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorum verticibus insistunt sublimes lineæ ęquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primò positis, ex costructione, vtrumque vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium DG, IM, demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum,

a 26. vndecimi.

b 14. sex



DH,

DH,IN,si bases sint DG,IM,inter se æquales,per coroll. propos.præcedentis.[a]Quare parallelepipeda DH,IN, cũ habeant bases DG,IM,æquales,& æquales quoque altitudines, inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint,&c. Quod erat demonstrandum. [a] 31. vndecimi.

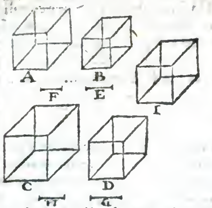
SCHOLIVM.

VICISSIM quoque,si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum,æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo a media linea descripto:erunt tres rectæ continue proportionales.Sit enim parallelepipedum D H, descriptum ex rectis A,B,C,vt dictum est,æquale sibi æquiangulo parallelepipedo IN,descripto à media B.Dico tres A,B,C,esse continue proportionales.Nam veluti prius, ostendentur eorum altitudines ex F,L,demissæ esse æquales.Quare cum & ipsa ponantur æqualia;erunt eorũ bases DG,IM,æquales per ea, quæ ad finem propos.31.huius lib:demonstrauimus.Quæ bases cum angulos habeãt æquales DEG,IKM,ex constructione:[b] habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est,vt DE,ad IK,ita KM,ad EG.Quapropter cum DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG,ipsi C.sumpta sit æqualis; Erit quoque vt A,ad B,ita B,ad C. Quod est propositum. [b] 14. sexti.

THEOR. 32. PROPOS. 37. xxxix.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda quæ ab ipsis & similia,& similiter describuntur, proportionalia erunt.Et si solida parallelepipeda,quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia : Et ipsæ rectę lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; vt quidem A,ad B, ita C, ad D ; constituanturque super A, & B,duo parallelepipeda A,& B,similia,similiterq;descri



pta; item super C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, siue hæc sint illis similia, siue non. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportionalia; Vt quidem solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Inueniantur enim per scholium propos. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continue proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumũtur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B, Et vt C, ad H, ita solidum C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. huius lib. Igitur erit vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

SINT iam e contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoque proportionales. [a] Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, [b] super quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterque positum. Quoniam igitur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, vt iam est ostensum, vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D. Igitur erit vt solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. [c] Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam

a 12. sex
b 27. vndecimi.
c 9. qn.

B, ita

B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint. &c. Quod erat demonstrandum.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primum vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. a Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, vt rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. b Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad recttam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

a 33. vndecimi.

b 33. vndecimi.

SCHOLIVM.

EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterque descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusque solidum sumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demonstratum est. Cum igitur solidum secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & linea secunda æqualis tertiæ lineæ; perspicuum est, quod proponitur.

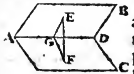
TOTA vero hæc propositio cõuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia sunt triangula, vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. c Cum igitur prismata, eorum di- c 15. qu

midia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur.

xiii.

THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



PLANVM enim AB, rectum sit ad planum A C, sitque eorum communis sectio recta A D; Et ab E, puncto plani A B, ad planum A C, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communẽ sectionẽ A D. Nam si fieri potest,
a 12. pri cadat extra ad punctum F, a & ab, F, in plano A C, ducatur ad rectam AD, perpendicularis F G; connectaturque recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem A D, erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atque adeo & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt, quod est absurdũ,
b 17. pri b cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum A C, non extra communem sectionẽ AD, cadet. ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HAEC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demõstrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demissa perpendicularis ad planum A C, non cadit in communem sectionem AD, sed in pũctum F, extra sectionẽ,
c 12. pri *c ducatur ex E, ad rectã AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defi. huius lib. recta erit ad planũ A C. Quare ex puncto E, extra planũ AC, ductæ sunt ad ipsum planũ AC, duæ perpẽ-*

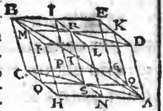
dicu-

liculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

THEOR. 34. PROPOS. 39. XXXX.

SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

SINT parallelepipedi A B, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ extensa sint duo plana I N, K O, quorum sectio communis sit recta R S: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum A B, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis R B, R D, S A, S C; considerentur duo triangula A Q S, C O S. Quoniam igitur latera A Q, Q S, trianguli A Q S, æqualia sunt lateribus C O, OS, trianguli C O S; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium A G, C H, a & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS,) b & angulus A QS, æqualis alterno angulo COS: c Erunt & bases A S, C S, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. d Atqui anguli A S Q, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, A S O, duobus sunt rectis æquales: e Ac propterea AS, CS, vnam rectam lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectā. Rursus quia vtraque AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, f ipsæ quoque inter se parallelæ erunt, & æquales. g Quare & rectæ A C, B D, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ A S, B R, æqua-



a 34. pri
b 29. pri
c 4. pri.
d 13. pri
e 14. pri
f 9. vndecimi.
g 33. pri

27. undecimi. les sunt. Quia vero AC,BD, parallelę sunt; [a] erunt rectæ AB,RS,in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuo se-
d29. & 15. pri. cabunt, in puncto videlicet T. [b] Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST,æquales sint duobus angulis
c26. pri BRT,BTR;trianguli BRT;& latus AS, lateri BR: [c] Erunt reliqua latera TA,TS,reliquis lateribus TB,TR,æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum,quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

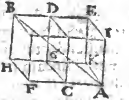
HINC efficitur,in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in vno puncto,nimirum in puncto T,in quo bifariam diuidunt, vt hic demonstratum est,rectam RS.

SCHOLIVM.

HVIC theorematì addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos,34. primi lib.demonstrauimus,videlicet.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum:bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.

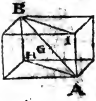
SECETVR parallelepipedum AB,plano CD, per centrũ hoc est, per punctum medium diametri AB,quod sit G. Dico parallelepipedum bifariam secari. Sit enim primo planum
d17. undecimi. *CD,oppositis planis AE, BF,parallelum.[d] Et quia plana parallela BF,DC,EA,secant rectas quascunque proportionaliter;secatur autem BA,bifariam in G; secabuntur quoque latera aduersorum planorum AH,BI,atque adeo & bases*
e25. undecimi. *AH,BI,bifariã.[e] Cum igitur sit vt basis KC,ad basim CH,ita solidum AD, ad solidum CB, erit parallelepipedum AB,sectum bifariam plano CD,per centrum G,ducto.*



TRANSEAT secundo planum secans AIBH, per diametros BI, AH, planorum oppositorum; quoniam & sic

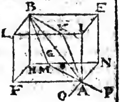
seca-

secatur parallelepipedum per centrum G, immo per totam diametrum AB;a cum AB, in plano sit parallelarum AH, BI. b *Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.* a 7.[illegible] vndecimi. b 2[illegible].vndecimi.

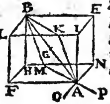


*TERTIO planum secans AKBM, neque sit aduersis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum; sed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, secantur plano AKBM;*c *erunt communes sectiones AM, BK, parallelae. Similiter parallela erunt AK, BM, cum sint cõmunes sectiones planorum parallelorum AL, BN, facta a plano AKBM. Quare parallelogrammum est AKBM;*d *ideoque tam recta AK, BM, quam rectae AM, BK, inter se erunt aequales. Quia ergo latera BK, BL, triãguli BKL, aequalia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, aequalis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelae;*e *ac proinde aequales anguli erunt OAP, LBK.*f *Cum igitur OAP, aequalis sit angulo MAN; aequales quoque erunt anguli KBL, MAN.)*g *Erunt bases KL, MN, inter se; & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, aequales; & triangulum triangulo aequale. Quare & similia erunt triangula BKL, AMN,*h *cum latera habeant circa aequos angulos proportionalia. Quoniam vero recta KL, recta MN; & angulus BKL, angulo AMN; & angulus KBL, angulo MAN, est aequalis; vt ostendimus; erit & reliqua IK, reliqua HM; & reliquus angulus BKI, reliquo AMH; & reliquus KBE, reliquo MAF, aequalis. (Est enim tota LI, toti NH, aequalis, & tam anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH, duobus rectis aequales; & totus angulus LBE, toti angulo NAF, aequalis, ob similitudinem parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera BE, EI, lateribus AF, FH, aequalia; & anguli BEI, EIK, angulis AFH, FHM, ob parallelogramma LE, FN; igitur quadrilaterum BKIE, & aequilaterũ, & aequiangulum*

c 16.vndecimi. d 34.pri. e 10.vndecimi. f 15.pri. g 4.pri. h 4.sex.

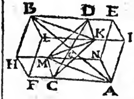


gulum



gulum est quadrilatero AMHF; Ac propterea æquale & simile, cum singula singulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & similia triãgula BHM, AIK; & quadrilatera AKLF, BMNE; cum inter se sint & æquilatera et æquiangula. Quapropter solidum contentũ planis AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF, æquale erit solido contento planis BMNE, EIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & æqualia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB, sectum est plano AKBM, per centrum G, bifariam.

POSTREMO planum secans CD, neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neque per vllos angulos eorum ductum, sed vtcunque secet plana opposita AH, BI. Ostẽdemus autem, vt prius, planum secans CD, esse parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quam rectas CM, DK, esse æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; connectanturque recta AM, BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE; [a] inter se sunt parallelæ; [b] Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in centro G. In solo enim centro G, recta AB, per hypothesim, secat planum CD, in quo existit recta CD. [c] Et quoniam angulus BDC, angulo alterno ACD, æqualis est: [d] Est autem & angulus BGD, angulo AGC, ad verticem æqualis; & latus BG, lateri AG, æquale, quòd AB, bifariam secetur in G, centro; [e] Erit & latus DG, lateri CG, æquale. Cum ergo per ea, quæ ad propos. 34. lib. 1. ostendimus, diametri CD, KM, se mutuo bifariam secent, transibit KM, per punctum G, ibique diametrum AB, secabit. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia sunt lateribus AG, GC, trianguli AGC; [f] & angulus BGD, æqualis angulo AGC; [g] Erit & basis BD, æqualis basi AC. Eodẽ argumento æqua-



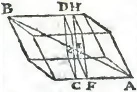
a 9. vndecimi.
b 7. vndecimi.
c 29. pri
d 15. pri
e 26. pri
f 15. pri
g 4. pri.

les erunt recta BK, AM. Quocirca cum tria latera B D, DK, KB, trianguli BDK, æqualia sint tribus lateribus A C, C M, M A, trianguli A C M; Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Est autem totus D B L, toti C A N, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus A M, A N, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; a Erit & basis KL, basi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli B K D, AMC, fient toti anguli D K L, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero A C M N, & æquilaterum est, & æquiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum singula conueniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademque ratione reliqua D E, reliquæ C F, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum DEIK, æquilaterum est quadrilatero CFHM: Sed & æquiangulum; cum anguli D E I, E I K, æquales sint angulis C F H, F H M, propter similitudinem parallelogrammorum B I, AH; & anguli E D K, I K D, angulis F C M, H M C, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æqualia esse & similia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, C F L K; cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. æquale est solido contento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cum hisce illa sint demonstrata & æqualia & similia. Parallelepipedum igitur AB, sectum est per centrum G, plano CD, bifariam.

a 4. pri.

SED secetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum CD, secat diametrū

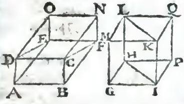
AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, secabitur parallelepipedū AB, bifariam plano FH, vt demonstratum est. Ponitur autem & bifariā secari plano GD; Igitur solida CB, FB, cum sint dimidia parallelepipedi AB, inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi. Quod demonstrandum erat.



THEOR. 35. PROPOS. 40.

xxxij. SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Aequalia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturque parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim cōnectantur rectæ NO, PQ constituta erūt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cū prismatis. Nam plana horū solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. huius lib. a Quoniam igitur parallelogram-



a 34. pri

mum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiusdem trianguli GHI, duplũ: æqualia erunt parallelogramma AC, GP.[a] Quare parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorũ dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, (b Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina, scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque, si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 31. vndecimi.

b 32. vndecimi.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cum imperet parallelepipeda compleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum ABCD, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM.

Et Solidorum secundum.

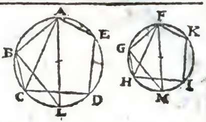
j. THEOR. 1. PROPOS: 1.

QVAE in circulis polygona similia; inter se sunt, vt a diametris quadrata.

SINT duo polygona similia AB C DE, FGHIK, descripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est, vt AB, ad BC, ita FG,
a 6. sexti ad GH;[a] erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera pro-
b 21. ter portionalia:[b] Est autem angulus ALB, angulo A C B; &

angulus

angulus F M G, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, ęquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, æquales ſint, a nempe recti in ſemicirculis exiſtētes; b



a 31. ter.
b 32. pri

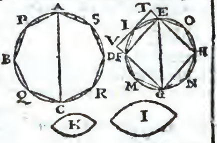
erunt & reliqui BAL, GFM, æquales. c Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. d Igitur eſt vt quadratum ex AL, ad quadratū ex FM, ita polygonum ABCDE, ſuper AB, ad polygonū FGHIK, ſuper FG; cum tam quadrata, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ. Quæ itaque in circulis polygona ſimilia, inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata. Quod erat demonſtrandum.

c 4. ſexti
d 22. ſex

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

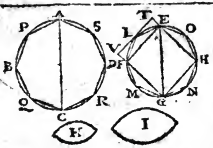
CIRCVLI inter ſe ſunt, quemadmodum a diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico eſſe, vt quadratū diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita ſe habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri E G, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I,



quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim eſſet æqualis, e haberet circulus ABCD, ad circulū EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea eſſet circulus ABCD, ad circulum E F G H; vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine ſcilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis ſit magnitu-

e 7. quinti



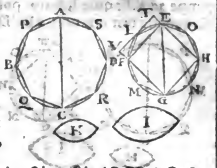
gnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quam dimidiū circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi EF, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratq; rectis HE, GF, productus in T, & V. a Quia ergo triangulum ELF, dimidiū

a 41. pri est parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quam dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF. &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero, si a circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFGH; & a reliquis segmẽtis plus quam dimidiū, nempe triangula ELF, FMG, &c.

b 1. d c. atque in hunc modum semper fiat detractio; b relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, excessus inter circulum EFGH, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quā magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS, simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile

fiet,

fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secẽtur in B, & D; & rursus circumferentiæ A B, B C, C D, D A; bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia ABCD, in quot distributa est circumferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ. &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, vt patet.[a] Quoniam igitur est polygonum A P B Q C R D S, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc est, per hypothesin, vt circulus ABCD, ad I: Est autẽ polygonũ APBQCRDS, minus erit circulo ABCD. b Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.



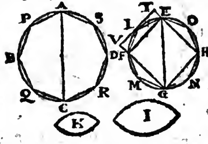
a 1. duodecimi.

b 14. quinti

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quàm maior circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum maioris diametri A C; Ita vt generaliter & vniuerse demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri A C. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam,

a 14. quinti. nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH,[a] maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare



erit vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratum diametri ad quadratũ diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Quamuis autem circulus ABCD, maior est, & EFGH, minor; eadem tamen ratione ostendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinẽ circulo ABCD, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorẽ. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratũ est: Ita vt generaliter & vniuerse quoque demonstratum sit, nunquam quadratũ diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD,
b 7. quinti. ad I;[b] sit autem vt circulus ABCD, ad I, ita idem circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulũ EFGH, siue circulus ABCD, circulo EFGH, maior sit, siue mi-

nor.

nor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

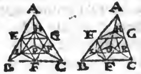
COROLLARIVM.

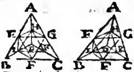
HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratũ est.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

OMNIS pyramis triangularem habens basim; diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius basis triangulum ABC, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, cõnectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, & vertices H, D; nec nõ in duo solida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBFG, & triangula opposita EHG, BIF; huius vero basis est triangulum CFG, cui opponitur triangulũ KIH, habétq; hæc prismata terminũ cõmunem, parallelogrã mum FGHI; & cũ duabus illis pyramidibus cõponunt totã pyramidẽ, vt constat, si recte cõcipiatur pyramidis vertex D, in sublimi, necnõ eius triãgula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, triãguli ADB,





secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter; [a] erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erūt IK, BC; & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; &

a 2. sex.

HG, DC. [b] Sunt autem & rectæ FG, HI, cū parallelæ sint ipsi AB, inter se parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt GH, FI, cum sint parallelæ ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, sunt parallelæ; [c] erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB. [d] Proportionalia igitur sunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo DBC. Sūt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH. pyramidi ABCD, similis est, per defin. 9. lib. 11. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ; [e] erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. [f] Quare latera trianguli HIK, lateribus trianguli A B C, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, simile est: Sunt autē & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DA B, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. [g] ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cum similia sint ostensa triangulo ADC, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cūm similia sint ostensa triangulo ABC, & super rectas posita AE, HI, [h] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum AEIH. Non secus æqualia erunt

b 9. vndecimi. c 10. vndecimi. d 4. sex. e 10. vndecimi. f 4. sexti g 21. sex h 34. pri

& si-

& similia triangula EHG, IDK, cum sint ostensa similia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, a quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales sunt & similes, per 10. defin. lib 11. quandoquidem omnia triangula vnius ęqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratū est. a 34. pri

RVRSVS, b quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac propterea & similia: c Sunt autem & parallella; cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelæ sint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG, BIF, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, prisma est, ex defin. Eodē modo prisma ostendetur solidum CFGHIK. d Cū. n. rectę FC, CG, GF, æquales sint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogrāma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiāgula inter se, ac propterea similia: e Sūt aūt & parallela, quod rectæ CF, CG, per quas ducitur planū CFG, parallelæ sint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur solidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, prisma est. Quoniam vero prismata EBFGHI, CFGHIK, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK; & parallelogrammum EBFG, basis illius, duplum est trianguli CFG, basis huius, per scholium propos. 41. lib. 1. f Ipsa inter se æqualia erunt. b 34. pri c 15. vndecimi. d 34. pri e 15. vndecimi. f 40. vndecimi.

DENIQVE quia prisma EBFGHI, maius est pyramide EBFI, totum parte; Est autem pyramis EBFI, æqualis & similis pyramidi AEGH, necnon pyramidi HIKD, vt perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidiū pyramidis ABCD. excedent, hæ vero a dimidio eiusdem

deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor vero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin,&c. Quod erat ostendendum.

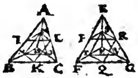
THEOR. 4. PROPOS. 4.

iiij. SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramides æquales inter se,& similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

SINT super bases triangulares ABC,EFG, duæ pyramides ABCD,EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N; O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque secta sit in binas pyramides æquales inter se,& similes toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; vt vult propositio præcedens: eodemque modo intelligantur esse diuisæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia

prismata

prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit vt BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod vtraque linea diuisa est bifariam; sint autē triangula ABC, LKC, similia similiterque posita; Item triangula



EFG, RQG, ex coroll. propos. 4. lib. 6. a Erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, vt mox ostendemus, atque adeo ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et vt vnum prisma, videlicet IBKLMN, ad vnum prisma PFQRST. b ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta diuisione. Sed vt illæ bases ad has, ita est LKC, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQG, quæ his est æqualis, & similis, vt in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cum sint, vt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH, c ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM,

a 22. sex
b 12. qu
c 12. qu

LM, MNOD, &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

QVOD autē sit LKC, ad RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad bases ABC, EFG, demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, b *secant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demissam proportionaliter; secatur autem DC, bifariam in O; secabitur quoque perpendicularis ex D, demissa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demissa bifariam secabitur a plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatū altitudines, æquales; Ac proinde prismata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, vt bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstrauimus.*

b 17. vndecimi.

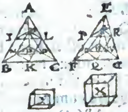
THEOR. 5. PROPOS. 5.

v.

SVB eadem altitudine existentes pyra-

mides,& triangulares habentes bases;inter se sunt, vt bases.

SINT pyramides eiusdem altitudinis ABCD,EFGH, quarum bases triangula ABC,EFG.Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur vt basis ABC,ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus,magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH,in duas pyramides æquales,& duo prismata æqualia,iuxta propos.3.huius lib.Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH,in binas pyramides æquales,& in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si a pyramide E F G H, auferatur plus quam dimidium,nempe duo prismata P F Q R S T, GQ RSTV;a quæ maiora sunt dimidio pyramidis EFGH: Itē a reliquis pyramidibus E P R S, STVH,plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps;b relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis EFGH,supra solidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor.Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur solidis X,Y;erunt reliqua prismata in pyramide EFGH, maiora solido X. Diuidatur pyramis ABCD,in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM,MNOD,in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide E F G H. c Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide A B C D, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide E F G H, vt basis A B C, ad basin E F G, hoc est, vt pyramis A B C D, ad solidum X:Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora,quam tota pyramis A B C D; d erunt quoque omnia prismata in pyramide E F G H, minora quā solidum X.Ostēsa vero sunt & maiora. Quod est absurdū.Nō ergo minus est solidū X,pyramide EFGH.



a 3.duodecimi
b 1.dec.
c 4.duodecim.
d 14.qu

SIT deinde solidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, vt basis ABC, ad basin EFG: Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, vt basis EFG, ad basin ABC. Ponatur, vt solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur
a 14.quinti pyramide EFGH, a erit & pyramis ABCD, maior solido Y. Quare erit, vt basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, vt est, basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum X, pyramide EFGH, sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyra-
b 9.quinti mis ABCD, ad solidum X; b sit autem pyramis ABCD, ad solidum X, vt ad pyramidem EFGH, solido X, æqualem: Erit quoque vt basis ABC, ad basin EFH, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, si pyramides triangulares inter se sint, vt bases, ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abscisionis ad omnes angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritque vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constitutam: Sed sic quoque erat ad totam pyramidem.
c 9.quinti *c Pyramis ergo constituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod est absurdum.*

COROLLARIVM.

HINC fit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

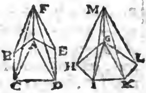
ITEM sequitur è conuerso, pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases eandem habere altitudinem. Et pyra-

mides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, bases habere æquales, si non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarii eodem argumento ostendemus, quo in conuerso propos. 30. & 31. lib. 11. demonstrando vsi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

THEOR. 6. PROPOS. 6. vi.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resolutis enim basibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuisa. a Quia vero est, vt basis ABC, ad basin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt basis ABCD, ad basin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: b Sed rursus est vt basis ACD, ad basin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo vt basis ABCD, ad basin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt basis ABCDE, ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Similí argumento erit vt basis GHIKL, ad basim GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt basis GKL, ad basin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. c Rursus quoniam est, vt basis ADE, ad basin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor bases ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eisdem proportionibus



a 5. duodecimi

b 5. duodecimi

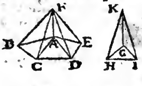
c 5. duodecimi

ABCDE	ABCDEF
ADE	ADEF
GKL	GKLM
GHIKL	GHIKLM

cum quatuor pyramidibus ABCDEF; ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula vides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit vt basis ABCDE, ad basin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygona latera habent multitudine æqualia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vnius basis plura continet latera quam basis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius basis sit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin.



Resoluto n. pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuisa.[a] *Quoniam vero est, vt basis ABC, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:*[b] *Erit vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo est ostensum:*[c] *& vt basis ADE, quinta quantitas ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quãtitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem;*[d] *Erit etiam basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita*

a 5. duodecimi.

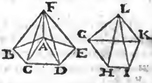
b 24. quinti.

c 5. duodecimi.

d 24. quinti.

pyramis ABCDEF, tertia quantitas cũ sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygona. Cum autem, vt demonstratum est, sit vt basis polygona ABCDE, ad basin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt basis GHI, ad basin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quam ob rem duæ pyramides qualibet, quarum vnius basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonstratio incipiat à polygono, eiusque pyramide, vt ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit initium quoque sumere a triangulo, eiusque pyramide, vt dictum est.

SED iam sint duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum bases sint polygona, sintque plura latera in vna base quam in altera. Dico rursus esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuisa pyramides. Quia vero, vt iam est demonstratum, est vt basis ABC, triangularis prima quantitas, ad basin GHIK, polygonã, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quãtitas ad pyramidẽ GHIKL, quartam quantitatem; a Erit etiam vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatẽ, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cũ sexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonstratum est; Et est quoque, vt basis ADE, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam



a 24. quin.

quan-

224.9n. *quantitatem, ut ante est ostensum;[a] Erit etiam vt basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi ABCDE.*

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quę inter se sunt, vt bases: eandem habent altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea, quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. 5. huius lib. diximus.

v. THEOR. 7. PROPOS. 7.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides ęquales inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma ABCDEF, cuius duo triangula opposita,

æqualia, ac similia ABF, DCE. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. [a] Quoniam igitur triangula A B C, A D C, æqualia sunt; [b] estque vt basis AB C, ad basin A D C, ita pyramis A B-CF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demissam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides A D F C, EF D C, super æquales bases A D F, EFD, constitutæ, & sub eadem altitudine, nẽpe perpendiculari a vertice C, ad planum ADEF, demissa. Est autem pyramis ADCF, eadem pyramidi A D F C, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi A D C, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF, & triangulis A D C, A C F, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EF-DC, cum tam EFDC, quam C D E F, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE,) totum prisma componentes, vt perspicuum est, æquales sunt inter se; Ac propterea prisma ABCDEF; in tres pyramides æquales est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.



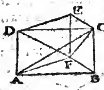
[a] 34 pri
[b] 5. duodecimi.

COROLLARIVM.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

SIT enim primum pyramis A B F C, triangularem habens basin ABF; & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis. Nam si ducatur recta DF, erit prisma diuisum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF, [c] vt demonstratum est; Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cum hæc illi sit æqualis,

[c] 7. duodecimi.



lis, immo eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, aequalis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, constituta, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea prisma e contrario esse pyramidis triplum.

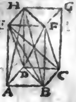
SIT deinde pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam.



Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero aequalia ADB, BCD, EHF, FGH, erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, vt demonstratum est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit vt pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma CDHGFB; a Ac propterea vt vna pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, aequales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & super eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt aequales, ex coroll. propos. 5. huius lib. Eademque ratione aequales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & super eadē altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, aequalis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine & su-

a 12. quinti

per



per eandem basim ABCD, constituta, per coroll. propos. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemque altitudinem.

QVOD si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singula pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiæ partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

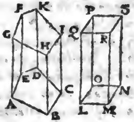
EODEM modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiusmodi pyramis, æqualis est pyramidi illi, quæ eandē cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propos. 6. huius lib. Quam quidem iam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIVM I.

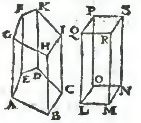
EX dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

SVB eadem altitudine existentia prismata, quascunque habeant bases, inter se sunt, vt bases.

QVAMVIS enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ, necnō de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus vniuerse de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quāuis plura latera, seu anguli in vnius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igi-



tur duo prismata eiusdẽ altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorũ bases sint figuræ multilateræ. Dico vt est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si.n.ex omnibus angulis vtriusq; basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases; Ac proinde per coroll. prædictum huius propos. quælibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. a Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, vt basis ad basin, vt ostensum est propos. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.



a 15. qu

CONVERSO modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholium propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIVM. II.

VNDE prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

E CONTRARIO, Prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demõstratũ.

SCHOLIVM. II.

CAETERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodo de prismatis, quæ in vertice habent plana basi parallela, æqualia, & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, æqualibus, similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodo prisma dici ab Euclide, vt in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triãgulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, ean-

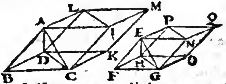
dem-

demque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, vt in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, vt in scholio ostendimus. At vero si in prismate tali basis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemq; altitudinem, tertia eius pars, sed duæ tertiæ partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud æquale & simile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars cõstituti parallelepipedi, ex corollario prædicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2 erit parallelepipedũ. 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinẽ, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quæ cum ita sint, nõ habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eãdem proportionem, quam basis ad basis, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel lineæ rectæ sunt, & bases parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia atque similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemque altitudinis, duæ tertiæ partes prismatum, vt modo demonstraui mus. Quare eandem habebunt rationẽ, quam prismata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viii.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita vt bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula vnius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidũ esse triplicatam proportionis, quã



habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficiãturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ conuenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur completum parallelepipedum BM, eiusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi BM, sint parallela, vt facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani ABC, EFG, sunt æquales, estque vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, similia. Eodem modo cum anguli ABD, EFH, sint æquales, sitque vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Item anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG: erunt & parallelogramma BL, BK, parallelogrammis FP,
a 24. vndecimi. FO, similia.[a] Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepipedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM, quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ,
b 24. vndecimi. EQ, GQ,[b] sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN,[c] prismata DBCILA, HFGNPE, habent ean-
c 15. qu dem proportionẽ, quam parallelepipeda BM, FQ; eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam pris-
d 11. qu mata dicta, earum tripla;[d] habebunt quoque pyramides
e 33. vndecimi. eandem proportionem, quam parallelepipeda.[e] Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Simi-

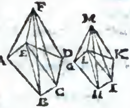
les

les itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum A B C D E, G H I K L: Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa A B, G H. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB EC; LH, LI, [a] *diuisa erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula A B E, E B C, C D E, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est vt E B, ad B A, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita H G, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM; Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM: Ac propterea cum sit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH; & vt EB ad BF, ita L H, ad H M, erit etiam ex æquo, vt FE, ad F B, ita ML, ad MH.* [b] *Quare æquiangula, atq; adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula F E A, F A B, A BE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, G H L M, ex defin. 9 lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM.* [c] *Quapropter, vt demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singulæ ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant vnam &*



a 20. sex.

b 5. sex.

c 8. duodecimi.

eandem proportionem, ob ſimilitudinem baſium A B C D E, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides G H LM, LHIM, IKLM, vnam eandemque proportionem, triplicatam ſcilicet illius;ᵃ Atque idcirco erit vt vna pyramis ABEF, ad vnam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKL M. Quam ob rem, cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod eſt propoſitum.

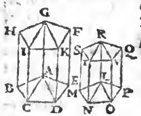
a 12.quinti

b 8.duodecimi.

S C H O L I V M.

EADEM ratione priſmata ſimilia habebunt triplicatam proportionem homologorũ laterum. Sint enim duo priſmata ſimilia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem eſſe triplicatã proportionis homologorum laterũ. Nam ſi ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD; LN, LO, erunt, vt de pyramidibus dictum eſt, triãgula ABC, CAD, DEA, triãgulis LMN, NLO, OPL, ſimilia. Similiter, ſi ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, ſimilia, cum omnia plana priſmatum oppoſita ſimilia exiſtant, per definitionem priſmatis. Quoniam vero ob ſimilitudinem priſmatum, parallelogramma CH, NS, ſimilia ſunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM; Vt autem CB, ad CA; ita quoque eſt NM, ad NL. ob ſimilitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit ut IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rurſus quoniam angulus ſolidus N, æqualis eſt ſolido angulo C, ob ſimilitudinem priſmatum; ſi ille huic ſuperponatur, omnia inter ſe conuenient, nimirum angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD; Conuenit autem & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA, ſunt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales ſunt; Ac propterea cum latera circa ipſos oſtenſa ſint eſſe pro-

c 20.sexti



portionalia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; et triãgula ABC, GHI, triãgulis LMN, RST, similia sũt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sũt, ex defi. solidorũ similiũ. Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV; nec non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ. per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem, singula ad singula, laterum homologorũ BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. proportionem habere homologorum laterũ BC, MN, triplicatam, quo paulo ante vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

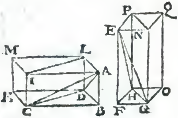
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, prismata multãgula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9. vii.

AEQVALIVM pyramidum, & triãgulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illę sunt ęquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propos. dictũ est, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus,



connectanturque rectæ L I, P N; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ. cum sint prismatũ dupla æqualia quoque erunt. [a] Quare bases eorum

a 34. vndecimi. & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit vt basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinem solidi

b 15. quinti. BM: [b] Vt autem basis BI, ad basim FN, ita est triangulum ABC, ad triangulũ EFG Igitur erit quoque vt basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eædem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyra-

c 14. quinti. mides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius; [c] cũ sit vt AB C, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eædem altitudines parallele-

d 34. vndecimi. pipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorũ, & altitudines eorundem reciprocæ; [d] Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & prismata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

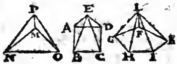
EADEM ratione Aequalium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triãgulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem A B C D, basin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem

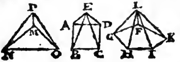


rem. Fiat basi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, si basis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonstrauimus ad propos 42. lib. 1. Deinde super KLM, fiat pyramis KLMN, eiusdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent bases, & eandem altitudinẽ; ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, bases triangulares; a erit vt basis ABC, ad basin KLM, hoc est, ad huic æqualem basin EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc est, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium bases & altitudines reciprocantur. a 9. duo decimi.

SED reciprocentur iam harum pyramidum bases atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constructa enim figura eodem modo; cum basis KLM, æqualis sit basi EFGH, & altitudo pyramidis KLMN, eadem, quæ pyramidis EFGHI, ponatur autem esse vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque vt basis ABC, ad basim KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. b Quamobrẽ æquales sunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis sit pyramidi EFGHI, per ea, quæ ostensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod est propositum. b 9. duo decimi.

SINT deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum bases sint multangula. Fiat rursus triangulum MNO, æquale basi ABCD, & pyramis MNOP, eiusdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Eritque ex scholio propos. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi





FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis est pyramidi FGHIKL. Quare, vt nunc demonstrauimus, erit vt basis MNO, hoc est, basis ABCD, sibi æqualis, ad basim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc est, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, bases & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam bases harum pyramidū atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constituta enim eodem modo figura, cum basis MNO, æqualis sit basi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinē pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinē pyramidis MNOP. Quare vt ante ostendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIKL: Est autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis ex scholio propos. 5. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod est propositum.

OMNIA hæc facile quoque demonstrabuntur conuenire prismatis quibuscunque. Nam si prismata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cū ipsis, & super easdem bases, æquales; cum sint eorum tertiæ partes, ex coroll. propos. 7. huius lib. Vel certe duæ tertiæ, si nimirum prismatum bases fuerint parallelogramma, & eorū vertices, linea recta, vt in scholio eiusdem propos. ostensum est. Quare, vt modo demonstrauimus, bases harum pyramidum atque altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ bases & altitudines eædem sint, quæ prismatum; reciprocabuntur quoque bases prismatum atque altitudines.

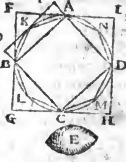
RVRSVS, si prismatum bases, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines pyramidum easdem bases & altitudines cum prismatis habētium. Quare, vt demonstratum est, pyramides æquales sunt; Ac propterea prismata, cum earum sint tripla, vel certe ses-

quialtera, æqualia quoque sunt. Quod est propositum.

THEOR. 10. PROPOS. 10. ix.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus basin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quã triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturque super hæc quadrata sub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidiũ est quadrati FGHI, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus; a estque vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiusdem altitudinis; Erit & parallelepipedum basis ABCD, dimidium parallelepipedi basis FGHI; Ac proinde parallelepipedum basis ABCD, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius basis circulus ABCD. Secentur bifariã peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulũ in K, quæ parallela erit ipsi AB, vt ad propos. 27 lib. 3. ostendimus, occurratq; rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, ABOP, intelligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. b Quia ergo triangulũ AKB, dimidiũ est parallelogrammi ABOP; erit quoque prisma basis AKB, dimidium prismatis, seu parallelepipedi basis ABOP: cum sit prisma ad prisma, vt basis ad basim, quemadmodũ ad propos. 7. huius lib. demon-

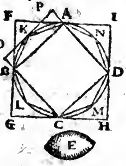


a 32. vndecimi.

b 41. primi.

straui-

ſtrauimus; Ac propterea priſma baſis A k B, maius erit, quam dimidium ſegmenti cylindri, cuius baſis figura cõtenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt priſmata, quorum baſes reliqua triangula B L C, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul maiora ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, &c. ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineę, conſtituentur eodẽ modo priſmata eiuſdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul, quorum baſes circuli ſegmenta, & ſic deinceps. Quoniam vero ſi a cylindro, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum baſis ABCD; & a reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum priſmata baſiũ A K B,
a 1. dec. BLC, &c. atque in hũc modum ſemper fiat detractio; a relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus cylindri ſupra triplum coni: Sint iam ſegmenta cylindri relicta baſium AK, KB, BL, &c (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, ſimul; Si ex cylindro auferantur ſegmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipſa magnitudo E; quæ maior eſt dictis cylindri ſegmentis, erit reliquum priſma baſis multangulę AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cũ cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars priſmatis. Quare cum dicti priſmatis ſit tertia pars pyramis, cuius eadẽ cum ipſo baſis & altitudo, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod eſt abſurdum. Non igitur maior eſt cylindrus triplo coni.



SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratũ ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturque super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, a estque vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super ABCD, dimidium pyramidis super basin FGHI; ac proinde pyramis super basin ABCD, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus ABCD. Secentur peripheriæ AB, BC, CD, DA, bifariam in K, L, M, N, adiunganturque rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, vt ad propos. 17. lib. 3. demonstrauimus, occurratq; rectis DA, CB, productis in P, & O, & super AKB, ABOP, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. b Quia ergo triangulum AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis super basin AKB, dimidium pyramidis super basin ABOP, c cum pyramides habeant proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin AKB, maior erit dimidio segmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadẽ cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, secentur bifariã, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodẽ modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero si a cono, cuius basis

a 6. duodecimi.

b 41. pri

c 6. duodecimi.

circulus

circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin A B C D, quam maiorem esse ostendimus, quã dimidium coni, cuius basis est circulus ABCD; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium AKB, BLC, CMD, DNA; atque
1. de. in hunc modum semper fiat detractio; a relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quã E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est præfatis coni segmẽtis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt supra in corollario propositionis septimæ huius libri a nobis est demonstratum, erit huiuscemodi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum, Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostẽsus. Igitur æqualis est triplo coni, propertereaque conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandẽ cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS propositio hæc solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis conuenit, vt perspicuum est eius demonstrationem diligenter intuenti. Itaque propositio vniuerse ita proponi poterit.

OM-

OMNIS conus siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni & cylindri.

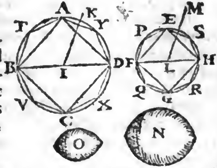
THEOR. II. PROPOS. II.

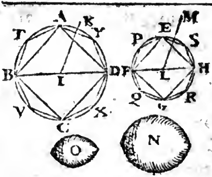
xi.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases.

SINT sub eadem altitudine coni & cylindri, quorũ bases circuli A B C D, E F G H, altitudines vero æquales IK, LM. Dico vt est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, sit vt basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono EFGHM. Si enim esset æqualis, a haberet conus ABCDK, ad conum E F G H M, & ad N, proportionem eandem; ac propterea esset conus ad conũ, vt basis ad basin: quod non conceditur. Sit ergo primũ N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita vt conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum E F G H, diuidanturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin E F G H, eiusdem altitudinis, & a reliquis segmentis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimi-

a 7. quinti.





dio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est; a relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N. Sint ergo iam segméta coni relicta basium EP, PF, FQ &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul, si ex cono detrahatur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmentis maior est, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum EPFQGRHS, eiusdem altitudinis cum cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, vt in propos. 2. huius lib. docuimus. ducanturque circulorum diametri BD, FH, Quoniam igitur per coroll. propos. 2. huius lib. est vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonũ EPFQGRHS; Vt autem circulus A B C D, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N, b & vt polygonum, ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, vt conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, c erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N: Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

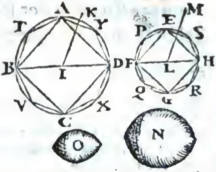
a 1. dec.

b 6. duodecimi.

c 14. qn.

SIT Secundo N, maior cono E F G H M. Cum igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM;

maior



maior quoque erit conus A BC D K, quã O. Quare erit vt circulus EFGH, ad circulũ ABCD, ita conus E FGHM, ad magnitudinẽ O, quę minor eſt cono ABCDK, quod eſt abſurdũ. Oſtẽſum.n.eſt iã, nõ poſſe eſſe conũ ad magnitudinẽ minorẽ alio cono, vt eſt baſis illius coni ad baſin huius coni. Nõ ergo maior eſt N, magnitudo cono EFGHM, Sed neque minor eſt oſtẽſa; Aequalis igitur eſt. Quapropter cũ ponatur, vt baſis ABCD, ad baſin EFGH. ita conus ABCDK, ad N; aSit aũt, vt conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK ad conum EFGHM, erit quoque vt baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDk, ad conum EFGHM. a 7. quinti

b QVONIAM autem, vt conus ABCDK, ad conum EFGHM. ita eſt cylindrus ABCDK, (qui triplus eſt coni ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus eſt coni EFGHM,) Erit quoque vt baſis ALCD, ad baſin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo vſi ſumus in conis, ſi loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & priſmata. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum. b 15. quinti

SCHOLIVM.

PERSPICVVM quoque eſt, hanc propoſitionem, quam Euclides de conis, & cylindris ſolis rectis propoſuit, ob rationem ſuperius traditam, extendi etiam poſſe ad conos, & cylindros ſcalenos, vt eius demonſtratio manifeſte indicat, ita vt propoſitio vniuerſe proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſiue ambo recti ſint, ſiue ſcaleni, ſi-

ue vnus rectus,& alter scalenus;inter se pro portionem habent,quam bases.

CONVERTETVR hæc propositio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter se sint,vt bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demõstrabis eo,modo,quo conuersum propos.32.lib.11.ostendimus.

COROLLARIVM.

HINC fit,conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandẽ,vel æquales bases constitutos,siue ambo sint recti,vel scaleni, siue vnus rectus,& alter scalenus, esse inter se æquales: propterea quod eandem proportionem habent,quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM sequitur,conos & cylindros æquales super eandem, vel æquales bases,in eadem esse altitudine: Et æquales in eadem altitudine,super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter,ac conuersum propos.31.lib.11.demonstratũ fuit.

x. THEOR. 12. PROPOS. 12.

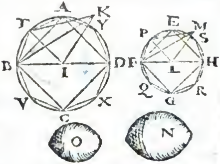
SIMILES coni,& cylindri, in triplicata ratione sunt diametroum, quę in basibus.

SINT similes coni,& cylindri, quorum bases circuli ABCD,EFGH,axes vero L K, L M, & diametri basium BD,FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum,habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur,habeat conus ABCDK,ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri B D,ad diametrum F H. Eritque N, vel minor,vel maior cono EFGHM. Si enim esset æqualis, a

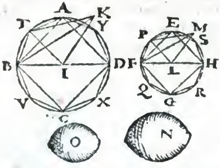
a 7.quin. haberet conus ABCDK,ad conum EFGHM,& ad N,pro-

por-

portionem eādem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conum EFGHM, esset quoque triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH; quod non conceditur. Sit ergo primū N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadē prorsus constructio figuræ, quæ in præcedēti propositione, ita vt rursus pyramis EPFQGRHSM, maior ostendatur, quam N. Ducātur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, vt habeantur duo triangula BKT, EMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, similes ponūtur; erit, ex 24. defin. lib. 11. vt diameter BD, ad diametrum FH, a ac propterea vt semidiameter BI, ad semidiametrum FL, ita axis IK, ad Axem LM; Ac permutando vt BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cum igitur anguli BIK, FLM, recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur; proptereaque axes recti ad eorū bases; b erūt triangula BIK, FLM, æquiangula; c Ac propterea vt KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autem BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, insistentes similibus arcubus BT, FP, sint æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostēsum est; sitque vt BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatem tam linearum BI, IT, quam FL, LP; d erunt triangula BIT, FLP, similia) Igitur ex æquo, vt KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rursus quia latera KI, IB, trianguli KIB; æqualia sunt lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti; ex defin. 3. lib. 11. cum axis IK, rectus ponatur ad circulum ABCD, e erunt bases KB, KT, æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cum vtrobique sit proportio æqualitatis. f Quoniam vero vt KB, ad BT, ita KT; ad eandem BT; Item vt MF, ad FP,



a 15. qn.
b 6. sex.
c 4. sex.
d 6. sex.
e 4. pri.
f 7. qn



ita M P, ad eandem FP: Erat autem vt K B, ad B T, ita MF, ad FP: Erit quoque vt kT, ad BT; ita M P, ad F P; Et conuertendo vt B T, ad TK, ita F P, ad P M. Quare cum sit vt T K, ad KB, ita PN, ad MF, & vt KB, ad B T, ita MF, ad FP; Et vt BT, ad TK ita FP, ad PM, veluti ostensum est; habebunt triangula BKT, FMP, latera proportionalia a ideoque æquiangula erunt; Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambiẽtia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quæ cum sint multitudine æqualia, erunt dicta pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propos. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita est B I ad FL, ob similitudinem triangulorum BI T, FLP; b Et v BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramiden habebit quoque proportionem triplicatam diametrorun BD, F H: Ponebatur autem & proportio coni ABCDK ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt py ramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, it conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis A T B V C X DYK, minor sit cono ABCDK, pars toto; c erit & pyrami EPFQGRHSM, minor quam N, Ostensa autem est & ma ior. Quod est absurdum. Non igitur maior est magnitud N, cono EFGHM.

a 6. sexti

b 11. qu

c 14. qu

SIT deinde N, maior cono EFGHM. Cum ergo pc natur conus ABCD K, ad N, habere proportionem tr plicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem E P F Q G R H S M, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime ostendimus: Erit vt conus ABC D K, a N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem E P F C G R H S M; & conuertendo vt N, ad conum A B C D

ita

ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem A T B V C X D Y K. Quare cum ex coroll. propoſ. 8. huius lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem A T B V C X D Y K, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF, ad TB, hoc eſt, diametri FH, ad diametrum B D; habebit quoque N, ad conum A B CD K, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrũ BD. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum B D. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHK,[a] erit quoque conus ABCDK, maior quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono A B C D K, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum B D, Quod eſt abſurdum, Oſtenſum enim eſt, non poſſe conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent baſium diametri. Non ergo maior eſt magnitudo N, cono E F G H M: Sed neque minor eſt oſtenſa. Aequalis igitur eſt; [b] ac proinde conus A B C D K, eandem habet proportionẽ ad conum EFGHM, & ad N. Cũ ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorum B D, & F H; erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportione triplicata.

a 14. quinti

b 7. quinti

c 15. quinti

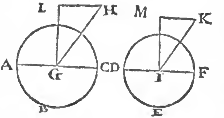
[c] QVONIAM vero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in baſibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonſtrabitur, quo vſi ſumus in conis, ſi modo loco conorum, & pyramidum aſſumantur cylindri, atque priſmata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

QVOD ſi maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, perſpicuum eſt, in ſecunda parte huius propoſ. Euclidem aſſumere, demonſtratum eſſe propoſ. 8. huius lib. mi-

norem pyramidem ad maiorem habere proportionem later. homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monu mus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putan referri semper debere maiorem quantitatem ad minorem, v habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

HAEC porro propositio, quamuis etiam extendatur a similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstra tur in solis rectis conis & cylindris similibus, cum in de monstratione assuman tur axes recti ad ba ses. Quocirca eam ha ratione ostendemus i. similibus conis & cylin dris scalenis. Sint simi les coni, & cylindri sca leni, quorũ bases circul ABC, DEF, axes vero GH, IK. Dico tam conũ ad conũ, qu cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri a diametrum triplicatam. Intelligãtur enim super easdem ba ses duo coni, & cylindri recti earundem cum scalenis altitu dinum, quorum axes GL, IM. Ducãturque per rectas GH GL; Item per IK, IM, plana secantia bases lineis rectis AC DF, quæ diametri basium erunt. Quoniam igitur axes GL IM, recti sunt basibus ABC, DEF, a erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad easdem recta. b Ac propterea perpen diculares lineæ ex H, K, ad bases demissæ cadent in AC, DF, communes sectiones; & proinde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cum coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & an guli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. c Reliqui igitur, HGL, KIM, æquales quoque erunt. Quoniam ve ro coni ABCH, ABCL, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta HL, per axium vertices ducta ipsi AC, parallela; d ideoque angulus L rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erũt, cũ sint æquales eorũ al terni anguli CGH, FIK. Triãgula igitur GHL, IKM, æquiãn gula sunt; e atq; idcirco erit vt GH, ad GL, ita IK, ad IM; &



a 18. vn decimi.
b 38. vn decimi.
c 32. pri
d 29. pri mi.
e 4. sexti

permutan-

permutando, vt GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt aũt axis GH, ad axem IK, ita est AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit, vt diameter AC, ad DF, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti ABCL, DEFM, similes erunt ex definitione. a Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant basim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) est æqualis, vt constat ex coroll. propos. 11. huius lib. b Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABGH, ad conum & cylindrum DEFk, ideoque proportio coni & cylindri ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, triplicata quoque erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod est propositum.

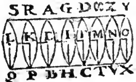
a 12. duodecimi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

xj.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit ut cylindrus ad cylindrũ, ita axis ad axem.

SECETVR cylindrus ABCD, plano GH, parallelo aduersis planis AB, CD, quod quidem secet axem EF, in I. Dico vt est cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita esse axem EI, ad a[xem] IF. Intelligatur. n. cylindrus ABCD, in vtramque partẽ, vna cũ eius axe & rectãgulo EC, ad cuius reuolutionem descriptus est cylindrus, protractus quantũlibet: Sumãturq; in axe producto quotcunque rectæ EK, KL, æquales ipsi EI; Item quotcũq; rectæ FM, MN, NO æquales ipsi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, describent cir-



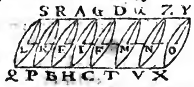
culos G H, P Q, Q S, Tα, V Z, X Y, parallelos & æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumferuntur.



Ac propterea cylindri erunt SP, P A, A H, H D, D T, T Z, Z X, ex definitione, componentes totum cylindrum SQXY, Quoniam vero tam cylindri S P, P A, A H, super bases æquales Q S, P R, B A, & sub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales sunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, Tα, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex est axis I L, ipsius axis I E; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudinis) æqualis quoque est cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri CG, quartæ magnitudinis) vt ex propos. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione; Erit, per defin. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axem IF, secundã magnitudinem, vt cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrũ, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandũ.

SCHOLIVM.

ETSI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationẽ cylindro scaleno facile accomodabis, si modo adhibeas descriptionem cylin-



dri scaleni sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectan-

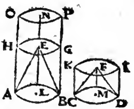
gulum circa quiescens latus circumfertur; sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri L S, K R, E A, &c. semper æquidistantes circa centra L, K, E, &c. vna cum recta SY, semidiametros coniungente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex ijs, quæ scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.

xi.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.

SINT super bases æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, seu altitudines. (Nam in conis & cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines) LE, MF. Dico esse conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vna cum eius axe LE, & rectangulo AG; abscindaturq; axis EN, æqualis axi M F, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, vt fiat cylindrus GHOP, eiusdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniã igitur cylindri HP, CI, cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll. propos. 11. huius lib. a cylindrus A G, ad ipsos eandem habebit proportionem. b Est autem cylindrus AG, ad cylindrum HP, vt axis, seu altitudo LE, ad axem, seu altitudinem EN, hoc est, ad altitudinem M F, sibi æqualem. Igitur & cylindrus A G, ad cylindrum C I, erit quoque, vt altitudo LE, ad altitudinem MF.



a 7. quinti. b 13. decimi.

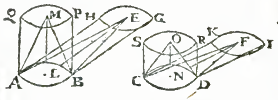
c QVIA vero coni ABE, CDF, sunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI; d ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LE, ad altitudinem M F. Super

c 10. duodecimi. d 15. quinti.

per æqualibus igitur basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt altitudines. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

HOC idem conuenire conis scalenis, hoc modo demonstrabimus. Sint super bases æquales AB, CD, coni ABE; CDF, & cylindri ABGH, CDIK, scaleni, quorum altitudines LM, NO. Dico conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, esse, vt est altitudo LM, ad altitudinem NO. Super basin enim AB, construatur cylindrus rectus ABPQ, sub altitudine LM; Item super basin CD, cylindrus CDRS, sub altitudine NO.[a] Quoniam igitur est cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrũ rectũ CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO: Est autem cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Item cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex coroll. propos 11. huius lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.



a 14. duodecimi.

QVONIAM autem coni, [b] cum sint tertiæ partes cylindrorum, [c] eandem habẽt proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO Quod tamen eodem argumento, quo vsi sumus in cylindris, confirmari potest, vt perspicuum est, si super bases AB, CD fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

b 10. duodecimi.
c 15 quĩn.

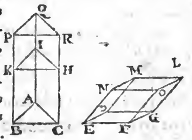
IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit scalenus, alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus scalenus ABGH, æqualis sit cylindro recto ABPQ: sit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonstrauit: Erit quoque cylindrus scale-

nus

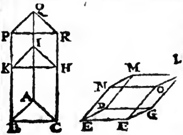
nus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

a *QVONIAM vero coni eandem habent proportionem, quam cylindri,* b *cum illi horum sint tertiæ partes; Erit etiã conus scalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod nihilominus ostendetur eadem ratione, qua vsi sumus in cylindris, vt manifestum est.* a 15. quinti. b 10. duodecimi.

EADEM quoque hæc propositio conuenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. Sint enim super bases æquales ABC, DEFG, prismata ABCHIK, DEFGLMNO, & pyramides sub eisdem altitudinibus. Dico esse prisma ad prisma, & pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem. Sint namque insistẽtes lineæ AI, CH, BK, prismatis ABCHIK, ad basin ABC, perpendiculares, ita vt BK, sit altitudo prismatis ABCHIK; Productis autem rectis AI, CH, BK, sumantur IQ, HR, KP, æquales altitudini prismatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur prisma HIKPQR, eiusdem altitudinis cum prismate EL. Eruntque prismata HIKPQR, EL, cum habeant & bases, & altitudines æquales, inter se æqualia, ex coroll. 2. propos. 7. huius lib. c Ac propterea prisma ABCHIK, ad vtrumque eandem habebit proportionem. Quia vero ex scholio propos. 25. lib. 11 prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, est vt planum BI, ad planum KQ; d *Et vt planum BI, ad planum KQ, ita est recta BK, ad KP; erit prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, hoc est, ad prisma EL, vt BK, altitudo prismatis ABCHIK, ad KP, altitudinem prismatis HIKPQR, hoc est, prismatis EL. Quod est propositum.* c 7. quinti. d 1. sexti.



QVOD si insistentes lineæ AI, CH, BK, non sint perpendiculares ad basin ABC, constituendum erit super basin ABC, aliud prisma, cuius insistentes sint perpẽdiculares ad basin, & æquales altitudini prismatis ABCHIK. Nam cũ



ex 2. coroll. propos. 7. huius lib. hac duo prismata eandem habentia altitudinem, & basim, L sint aqualia, sitque prisma constitutum ad prisma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinem; erit & prisma ABCHIK, ad prisma EL, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.

a 15. quinti. b 10. duodecimi. a QVONIAM vero pyramides eandem habent proportionem cum prismatis, b quod illa sint horum tertia partes: Perspicuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem.

EADEM prorsus est ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, vt dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.

HAEC omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

OMNIA quoque hac facile conuerti possunt hoc modo.

CONI & cylindri tam recti, quam scaleni; Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

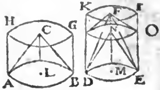
NAM alioquin pars aqualis foret toti, vt in conuerso propos. 31. lib. 11. ostensum est.

xij. THEOR. 15. PROPOS. 15.

AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocanrur bases & altitudines, illi sunt æquales.

SINT

SINT æquales coni ABCD, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum bases AB, DE; axes, altitudinesve LC, MF, Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidē sic propositum ostendetur. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum cylindri ponātur quoque æquales; erunt & bases æquales, ex coroll propof. 11. huius lib. Quare erit vt basis AB, ad basin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocæ.



QVOD si altitudines LC, MF, inæquales fuerint, sit MF, maior, ex qua abscindatur MN, ipsi LC, æqualis; & per N, ducatur planū ON, basi DE, parallelum, vt in scholio propof. 15. lib. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; a erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. b Est autem vt cylindus ABGH, ad cylindrum DO, ita basis AB, ad basin DE, cum æquales sint altitudines: c Item vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum bases sint æquales, immo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc est, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ sunt bases & altitudines.

a 7. quinti
b 11. duodecimi
c 14. duodecimi

IN conis vero ita concludemus propositum. Si coni ABC, DEF, sint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales. d cum coni sint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt ostensum est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo vsi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus MN, NF, constituātur duo coni, vt in figura.

d 10. duodecimi

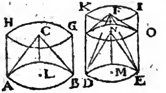
SED iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales, Quod quidem in cy-

lindris

lindris cōfirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum sit vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erūt & bases AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases AB, DE, & sub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propos. 11. huius lib.

QVOD si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huic
a 11. duo decimi. æqualem MN; a Est autem vt basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines sint
b 14. duo decimi. æquales: b Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint æquales: erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylin
c 9. qu. drus DEIK, ad eundem cylindrum DO; c Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

AT vero in conis hæc erit demonstratio. Si conorum ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabūtur quoque bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eædem sint bases, altitudinesq; conorum, & cylindrorum. Quā ob rem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoque recti easdem cum illis bases, & altitudines habētes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorū & cylindrorum rectorum, si eædem sint bases, & altitudi-

nes

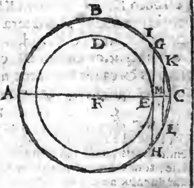
nes rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. inter se quoque erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex iis, quæ in scholio propos. 14 huius lib. docuimus.

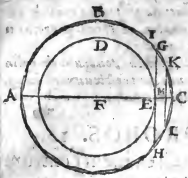
PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum. xiij.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idem centrum F, oporteatque in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulũ DE, in E, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, maior est arcu GC, si ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex residuo BC, dimidium BI, & ex residuo IC, dimidium IK, & sic deinceps; a relinquetur tandẽ minor arcus quã CG. Sit igitur iam arcus CK, arcu CG, minor, & subtẽdatur recta CK. Dico rectã CK, esse vnũ latus polygoni inscribendi. Si. n. arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrans AB, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans BC; necnon semicirculus AHC, in totidem partes, quot continet semicirculus a 1. dec.



ABC;



a 29. ter ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, a quæ æquales quidem erũt ipsi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidẽ non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti sunt; b erunt rectæ GH, KL, parallelę. Quare cum recta GH, tangat circulum DE, in solo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulũ, nec vnquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ lõgius a circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti; cum æqualia sint lateri CK, c ideoque æqualiter cum CK, a centro F, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

b 29. pri

c 14. ter

COROLLARIVM.

HINC est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed totã extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.

xiiij. PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

SINT

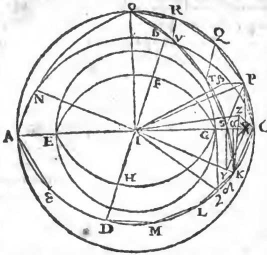
SINT duæ sphæræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphæram EFGH. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factæ in sphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrum sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumuolutionem sphæræ describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias sectionũ sunt æquales, cum ducantur ex centro sphærarum ad earum superficiem; erunt ipsæ sectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BD, se in centro I, secantes ad angulos rectos, vt sint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c.[a] Deinde in maiori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem vt facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gγ, ad circumferentiã vsque circuli ABCD, quæ circulum EFGH, tanget in G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et rectæ Gγ,[b] applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Aε. Quia vero si arcui Cγ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum GCγ,[c] latus Cγ, oppositũ maiori angulo, nempe recto, maius est latera Gγ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta Cγ, maior recta Aε; ac proinde arcus Cγ; arcu Aε, maior erit, vt constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus Cδ, arcui Aε, æqualis. Quod si ex quadrante CD, dimidium auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidium CK, & sic deinceps;[d] relinquetur tandẽ arcus minor arcu Cδ, seu arcu Aε. Sit ergo iam arcus CK, minor; Eritque recta CK, subtensa minor quam recta Aε, hoc est, quam Gγ, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam CK, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum Cδ, minorem arcu Cγ, non tangat circulum EFGH, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet; multo minus recta CK, subten-

a 16. duodecimi.

b 1. quarti.

c 19. primi.

d 1. decimi.



dens arcum minorem arcu Cδ, eundem circulum tanget. Rursus ducta diametro *K* N, a erigatur ex centro I, ad plana circulorum A B C D, EFGH, perpendicularis IO, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas O I, AC, & OI, KN, plana ducantur, b quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientq; cõmunes sectiones, circulos, vt iã dictum est, quorũ semicirculi sint AOC, *N*OK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. c quadrantes erunt OC, OK; atque adeo cum circuli A B C D, AOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes CD, OC, OK, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus CL; & quadrãtes OC, OK, *in* arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD; d Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum C K, k L, L M, M D; C P, P Q, Q R, R O; KS, ST, TV, V O, æquales. Coniunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares P X, S Y, e quæ in cões sectiones AC, NK, cadent; f eruntq; inter se parallelæ.

a 12. vndecimi.
b 18. vndecimi.
c schol. 21. ter.
d 29. ter
e 38. vndecimi.
f 6. vndecimi.
g 27. ter

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKY, anguli P X C, SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. g & anguli P C X, S K Y, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insistunt; (*N*am si ex semicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales C P, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus an-

ulis SKY, SYK, trianguli SKY. Sunt autem & latera P C, K, rectis angulis opposita, æqualia. a Igitur reliqua latera X, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare ū rectæ PX, SY; æquales sint & parallelæ; si connectaur recta X Y, b æquales quoque erunt & parallelæ P S, :Y, inter sese. c At quia & rectæ C K, XY, parallelæ sunt, uod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex emidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectę CX, KY, relinquentur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, t IX, ad XC, ita IY, ad YK.) d Erunt parallelę quoque PS, CK, inter se, cum vtraque parallela sit ipsi X Y, e ideoque as coniungentes rectæ CP, KS; in eodem cum ipsis plao existent. Totum igitur quadrilaterum C K S P, in vno rit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum cir uli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC, K, ostendemus similiter CK, QT, esse parallelas; atque deo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cum eidem CK, nt parallelæ; totumque quadrilaterum PSTQ, in vno ese plano. Eadem ratione in vno erit plano quadrilaterum QTVR. f Est autem & triangulum RVO, in plano. Si igitur adem constructio exhibeatur super reliqua latera K L, .M, MD. ductis scilicet quadrantibus OL. OM, OD, necon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, t tota sphæra maior repleatur quadrilateris, & triangus, quæ similia sint prædictis inter quadrantes O C, O K, uper latus CK, constructis, inscriptum erit in sphæra maori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilaeris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphæam minorem EFGH.

a 26. pri

b 33. pri

c 2. sex.

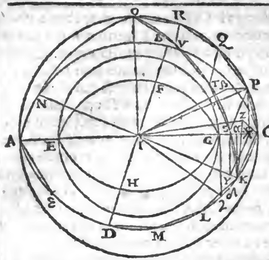
d 9. duodecimi.

e 7. vndecimi.

f 2. vndecimi.

DVCATVR enim ex I, ad planum CKSP, perpendicuaris IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Cadere autē per endicularem IZ, intra quadrilaterum CK S P, in scholio equenti ostendemus. Quoniam igitur, ex defin. 3. lib. 1. anguli I Z C, I Z K, recti sunt; g erit quadratum ectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C, & quadratum ectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ero quadrata rectarum æqualium I C, I K, æqualia sint, unt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis recarū IZ,

g 47. pri



Z K, æqualia; Ac proinde dempto cōmuni quadrato I Z, reliqua quadrata rectarū ZC, ZK, æqualia erunt, ideoque & ipsæ rectæ Z C, ZK, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad P S, ducentur, æquales esse & inter se & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallum ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos describi posse; demonstrabimus. Quoniam vero, vt

a 12. sec. postea ostẽdemus, angulus CZK, obtusus est;[a] erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hęc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis Kα. Cum igitur A C, dupla sit ipsius A I, & A α, maior sit quam AI, erit AC, minor duplo ipsius Aα. Quam ob rem

b 1. sex. cum sit,[a] vt AC, ad Aα, ita rectangulum sub AC, αC, ad rectangulum sub Aα, αC, quod bases horum rectangulorum sint AC, Aα, & eadem altitudo αC; erit quoq; rectangulum

c 17. sex sub AC, αC, minus duplo rectanguli sub Aα, αC.[b] Est autem rectangulum sub AC, αC, æquale quadrato rectę CK, & rectangulum sub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα, quod recta CK, inter AC, αC, sit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta A K, fieret triangulum rectangulum A C K.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum rectæ C K, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ

Z C, erit quadratũ rectæ K α, maius quadrato rectæ Z C.
a Quoniam vero quadratum rectæ IC, æquale est quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK; Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK, Erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum Iα, αK. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectæ αK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ I Z, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoque recta I Z, maior quam recta Iα. Quapropter cum punctum α, non tangat sphæram minoré EFGH, quod per coroll. propos. præcedentis recta Kα, tota sit extra dictam sphæram; multo minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram contingет. Ac proinde cum omnia alia puncta plani C K S P, longius absint a sphæra EFGH, quam punctum Z, vt mox ostendemus, non tanget planum CKSP, sphæram EFGH. a 47. pri

SED & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum C K S P, non tangere sphæram minorem E F G H, si prius ducatur recta I γ, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam C K, minorem esse recta Gγ: b Est autem C K, maior quam Z C, quod angulus CZK, obtusus sit, vt mox demonstrabitur; Multo maior erit Gγ: quam ZC; Ac propterea quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ Z C. c Quia vero quadratum rectæ I γ, æquale est quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum I Z, ZC; sunt autem quadrata rectarum Iγ, I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ, quadratis rectarum IZ, Z C, æqualia: Dempto ergo illinc quadrato rectæ G γ, & hinc quadrato rectæ Z C; relinquetur quadratum rectæ I G, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta I G, minor, quam I Z. Quam ob rem, cum IG, sit sphæræ minoris E F G H, semidiameter, existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, sphæram EFGH, nequaquam continget. b 19. pri c 47. pri

DVCATVR rursus ex I, ad planum P S T Q, perpendicularis Iβ, eritque β, centrum circuli circa P S-

TQ, descripti, vt demonstratum est; Connexis autem rectis βP, IP, cum angulus IβP, rectus sit, ex 3. defin. lib
*47. pri 11. [a] erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum Iβ. βP. Quia vero & quadratum rectæ I C, (quod æquale est quadrato rectę IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale est quadratis rectarum I Z, Z C; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum I Z, Z C: æqualia. Est autem quadratum rectæ Z C, maius quadrato rectæ βP, quod & linea ZC, maior sit, quam linea βP, vt postea ostendemus. Reliquũ igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoque & linea, Iβ, maior quam linea IZ: Ac proinde multo magis punctum β, extra sphæram EFGH, existet, quam punctum Z; propterea que multo minus planum P S T Q, quam C K S P, tanget sphæram maiorẽ EFGH. Eodem modo demonstrabimus quod neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

C O R O L L A R I V M.

EX ijs, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineę ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri spherarum; vt constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent.n. sibi mutuo lineæ rectæ ductæ a cẽtris ad basium angulos ob similitudinem basium: Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cum singulæ pyramides in vna sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum, constat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum vnius

sphæ-

sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphærarum, a cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem. a 15. quin

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breuiter a nobis erunt demonstranda.

PRIMVM itaque ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, in quadrilatero CKSP, esse obtusum. Quod vt commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est vt IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propos 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, similia sint.) Est autem IK, maior quam IY; b erit & KC, maior quam YX. Cum igitur YX, æqualis sit ostēsa ipsi SP, erit quoq; KC, maior quā SP, Ac propterea in hac figura, arcus CK, maior erit arcu SP, ex scholio propos. 28. lib. 3. c Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, sint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipsi KC, lineæ sint æquales demonstratæ; (subtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex constructione figuræ superioris constat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores; Atque idcirco quilibet arcum C, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque à semicirculo superabitur; ac proinde multo magis segmentum SP, minus erit semicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non esse in illis segmentis, sed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP, Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est Kβ, cadere intra quadrilatera; necnon & perpendicularem ex I, ad triangulum ORV, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus CK, quadrante maior est; angulus CZK, obtusus erit, nempe recto maior, cum

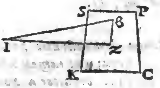


b 14. quin

c 28. ter

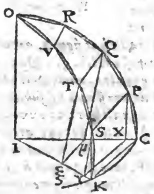
angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, vt perspicuum est ex scholio propos. 27. lib. 3.

SECVNDO *demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilateri C K S P, longius a centro I, abesse, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero C K S P, & ad iungantur rectæ I θ, Z θ.*



a19.pri *Quoniam ergo angulus I Z θ, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. Erit latus illi oppositum Iθ, maius latere I Z, quod minori angulo I θ Z, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius a centro I, distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.*

TERTIO, *ac vltimo probandum est, rectam ZC, maiorem esse recta β P. Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam P S, maiorem esse recta Q T. Describatur igitur pars superioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur semidiametris I C, I K, I O, & quadrantibus O C, O K, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli A B C D, in quo est triangulum I C K, perpendiculares Q μ, T ξ, b quæ in communes sectiones I C, I K, cadent, c eruntque inter se parallelæ, vt de rectis P X, S Y, dictum est. Quod si adiungatur recta μ ξ; erunt Q T, μ ξ, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & æquales P S, X Y.*



b38.vndecimi.
c6.vndecimi.

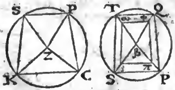
d2.sex d *Quia vero μ ξ, ipsi C K, parallela est; quod latera I C, I K, proportionaliter sint secta in μ, & ξ, veluti diximus*
e30.pri *de recta X Y; e erunt quoque μ ξ, X Y, parallelæ. Quare erit ex coroll. propos. 4. lib. 6. vt I Y, ad Y X, ita I ξ, ad ξ μ.*
f14.qn *Est autem I Y, maior quam I ξ. f Igitur & Y X, maior erit*

quam

quam $\xi\mu$; Ac proinde & PS, quæ æqualis est ipsi XY, maior erit quam QT, quæ æqualis est ipsi $\xi\mu$.

HOC *ergo demonstrato, describantur ex centris Z, ζ, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egrediantur que e centris recta ZC, ZK, ZS, ZP; ζP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quam βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo latera ZK, ZC, æqualia ponūtur lateribus βS, βP, & basis KC, maior est base PS; a erit angulus KZC, maior angulo SβP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam bases KS, CP, basibus ST, PQ, sunt æquales; b erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint æquales; ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur æqualis est recta ZC, recta ζP.* a 25. pri. b 8. pri.

SIT *deinde ZC, minor, quam βP. Et abscindantur βπ, βρ, βω, βφ, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturq; recta πρ, ρω, ωφ, φπ, c quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eo quod recta ex centris secta sunt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit vt βS, ad SP, ita βρ, ad ρπ. Cum ergo βS, maior sit quam βρ, d erit & SP, maior quam ρπ. Eademq; ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis ρω, ωφ, φπ; Ac propterea cum PS, minor sit, quam CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quam PS, erunt recta πρ, ρω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum recta βπ, βρ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint æquales; e erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales, quod tam illi, quam hi sint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC, quam βP: Sed neque æqualis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.* c 2. sex. d 14. qui. e 25. pri.

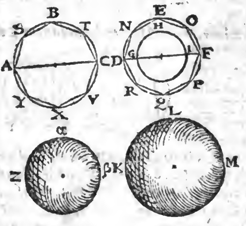


XV.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SPHAERAE inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

SINT duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrũ DF. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra A B C, ad aliam sphæram G-H I, minorem, vel KLM, maioré, quã DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ~~ad diametri A C~~, ad diametrum D F. Habeat primum sphera A-BC, ad sphæram G-HI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturque sphæra GHI, concentrica sphæræ DEF. a Inscribatur in sphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem sphæram GHI; Atque huic simile polyedrum A S B T C V X Y, inscribatur in sphæra ABC.



a 17. duodecimi.

Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ A B C, ad sphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Est autem, per coroll. pręcedentis propos. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri A C, ad

dia-

diametrum DF; Erit vt ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cum ſphæra ABC, maior ſit polyedro ASBTCVXY, a erit & ſphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum D F. 214.3ᵘ

HABEAT ſecundo ſphæra ABC, ad ſphæram K L M, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur, ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et conuertendo, vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrũ ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra K L M, ad ſphæram ABC erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrũ AC. Ponatur vt ſphæra KLM, ad ſphærã ABC, ita ſphæra DEF, ad aliã ſphærã Zαβ. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphæram Zαβ, proportionem triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra KLM, maior ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoque ſphęra ABC, maior, quam ſphæra Zαβ. Quapropter ſphæra D E F, ad ſphęram Zαβ, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum A C. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra ABC, ad ſphęram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neque ad minorem habet, vt demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram D E F, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter ſe ſunt

in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse sphæram ad sphæram, vt polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphæra ad sphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonstratum est.

* * *
* *
*

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

Et Solidorum tertium.

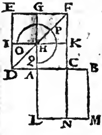
THEOR. 1. PROPOS: 1.

i.

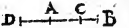
SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; maius segmentum assumens dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod a dimidia totius describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmẽtum AC. Producta autem BA, ad D, sit AD, dimidia totius AB. Dico quadratũ rectæ CD, quintuplum esse quadrati rectę AD. Describatur enim super CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipsi DE, parallela, secans diametrum in H, puncto, per quod ducatur IK, parallela ipsi CD. Produ-

cta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturque FC, ad N. eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. AI, KG,
a 3. def. sexti. quadrata rectarum A D, A C. a Quia ergo est vt A B, ad AC, ita AC, ad CB; b erit rectangulum CM, sub AB, CB,
b 17. sex æquale ipsi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipsius AD, sitque AL, ipsi AB; & AH, ipsi
c 1. sex. AD, æqualis; erit quoque AL, ipsius AH, dupla. c Est autē vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum.
d 43. pri Duplum igitur est AN, ipsius AK. d Quoniam autem A K, ipsi IG, est æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ æquale. Quare cum quadratum AM, quadruplum sit quadrati AI, ex scholio Propos. 4. lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineæ AD, erit & gnomon OPQ, eiusdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni O P Q, addatur ipsum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.



ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ A B, quadruplum est quadrati rectæ AD, quod linea
e 2. sec. AB, dupla lineæ AD, ponatur. e Est autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis sub A B, A C, & sub AB, BC, comprehensis; Et rursus, quod sub A B, A C, æquale est ei, quod sub AD, AC, bis; (sicut enim AB, ipsius



f 1. sex. AD, est dupla, f ita quoque erit rectangulū sub AB, AC, rectanguli sub AD, AC, duplum, cum vtriusque rectanguli eadem sit altitudo AC. Ac propterea rectangulum sub A D, A C, bis sumptum æquale erit rectangulo sub
g 17 sex AB, AC.) g Quod vero sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ A C, cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis quadruplū quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub
h 4. sec. A D, A C, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ A D. h Quocirca cum quadratum rectę C D, æquale sit quadratis rectarum A C, A D, vna cum rectangulo sub

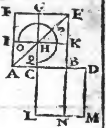
AD,

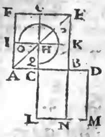
AD, AC, bis; Erit & quadratum rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI recta linea suijpsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, in C, possitque quintuplum segmenti AC; sumatur autem ipsius AC, dupla CD, quę, ut post ostendemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse CB, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrũ in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; EB, ad N. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratum CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdem quadrati CI, quadruplus: Est autẽ & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estque LC, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis; erit & LC, ipsius CH, dupla. a Cum igitur sit vt LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CK; erit quoque illud huius duplum; a 1. sex.





a 43. pri. a Est autem CK, ipsi HF, æquale. A...
le igitur est LB, ipsis CK, HF; Ac p...
de & reliquum quadratū KG, re...
rectangulo BM. Quoniā ergo sun...
rectæ CD, CB, BD; estque rectāg...
b 17. sex. BM, sub CD, BD, comprehensum...
le ipsi KG, quadrato rectæ CB; b E...
CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quam o...
ex definitione, recta CD, secta est in B, extrema ac m...
ratione, estque maius segmentum CB.

ALITER. Quoniam quadratum rectæ AB, quin...
c 4. sec. ponitur quadrati rectæ AC; c estque quadratum
AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, vna cum re...
gulo sub AC, CB, bis; Erunt & quadrata rectarum...
AC, vna cum rectangulo sub AC, CB, bis, quintupl...
quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ...
relinquetur quadratum rectæ CB, & rectangulum...
AC, CB, bis, quadruplum eiusdem quadrati rectę A...
autem & quadratum rectæ CD, eiusdem quadrati...
AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequal...
tur est quadratum rectæ CB, & rectangulū sub AC,...
bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectāgulum sub...
CB, bis, æquale sit rectāgul...



CD, CB; (sicut enim recta...
d 1. sex. dupla est rectæ AC, d ita qu...
duplum erit rectangulū sub...
CB, rectanguli sub AC, CB; cum vtriusque rectangu...
dem sit altitudo CB; Ac propterea rectangulum sub...
CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB, bis.) Erit &...
dratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, quad...
e 2. sec. rectæ CD, æquale: e At quadratum rectæ CD, æqua...
rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Igitur qua...
rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, æquale er...
ctangulis sub CD, CB, & sub CD, BD; Ac proinde...
pto communi rectangulo sub CD, CB, relinquetur...
f 17. sex. dratum rectæ CB, ęquale rectangulo sub CD, BD; f i...
que erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin...
cta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, e...

segme...

ſegmentum maius CB. Si igitur recta linea ſuijpſius ſegmenti quintuplum poſſit, &c. Quod erat demonſtrandũ.

LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior ſit neceſſario quam CB, ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum eſt, ex ſcholio pro poſ. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erũt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiuſdem quadrati rectæ AC. Eſt autẽ quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarũ AC, CD,[a] cum æquale ſit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo ſub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiuſdẽ quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod eſt propoſitum.

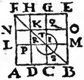
[a] 4. ſecũ.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

iij.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

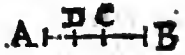
SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quadruplũ eſſe quadrati



rectæ CD. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum A E, in quo diameter B F. Deinde ex C, D, ducantur ipſis AF, B E, parallelæ CG, DH, ſecantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agantur ipſis A B, E F, parallelæ LM, NO, quæ ſecent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntque ex coroll. propoſ 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, C D, BD. Quoniam igitur recta A C, dupla eſt rectæ C D, erit ex ſcholio eiuſdem propoſ. quadratum L G, quadruplum quadrati P Q. Eſt autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum ſit vt A B, ad A C, ita AC, ad CB, [a] erit rectangulum ſub AB, CB, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipſi L G.) Igitur & CE, quadruplum erit quadrati PQ. Quia vero æqualia ſunt quadrata NH, PQ, ob æqualitatem rectarum A D CD; erunt earum latera HK, IQ, æqualia; [b] ac proinde rectæ EO, OM, ipſis oppoſitæ equales erunt. [c] Quare rectangula IO, QE, æqualia erunt. [d] Eſt autem IO, ipſi ID, æquale. Ergo & QE, eidem ID, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO; totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur C E, oſtenſum ſit quadruplum quadrati P Q; erit etiam gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ, quadruplus; Ac propterea addito quadrato PQ, erit quadratum D O, ex recta BD, quintuplum quadrati PQ, ex recta CD.

a 17. ſex
b 34. pri
c 36. pri
d 43. pri

ALITER. Cum A C, diuiſa ſit bifariam in D, & ei addita CB, [e] erit rectangulum ſub A B, B C, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ B D, At rectangulum ſub A B; B C, quadruplum eſt quadrati rectæ C D; (Nam cum ſit, vt A B, ad A C, ita A C, ad CB; [f] erit rectangulum ſub A B, B C, æquale quadrato rectę AC: quod cum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadruplum ſit quadrati rectæ CD; erit & rectangulum ſub A B, B C quadruplum eiuſdem quadrati rectæ C D.) Ac propterea rectangulum ſub A B, B C, vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum quadrati rectæ CD. Igitur & quadratum rectæ B D, quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si rec



e 6. ſec.
f 17. ſex

ergo

ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplũ potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter secetur; & minus segmentum assumens dimidiũ maioris segmenti quintuplũ possit eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AC, diuisa inæqualiter in C, cuius maius segmentum AC, bifariam sectum sit in D; sitque quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, diuisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus. (cum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum ponatur quadrati PQ, ex recta CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG: At gnomoni RST, æquale est rectangulum CE, vt supra ostẽsum est. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idem rectangulum CE, sub AB, BC, comprehensum: [a] Ac proinde erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quocirca, ex definitione, secta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum. a 17. sex

ALITER. Cum AC, diuisa sit bifariam in D, & ei addita CB, [b] erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD; Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, descripti; erit & rectangulũ b 6. sec.

sub rectis lineis AB,BC, descriptum, vna cum quadrato recta C D, quintuplum eiusdem quadrati recta C D. Quare ablato quadrato recta CD; rectangulum sub A B, B C, quadruplum erit quadrati recta C D: Est autem eiusdem quadrati recta CD, quadruplum quadratum recta AC, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato recta A C, aquale est rectangulum sub AB, BC.[a] Quamobrem erit, vt AB, ad A C, ita AC, ad CB; Ac proinde secta erit A B, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.

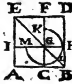
a 17. sex.

V

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum maius A C, & minus C B. Dico quadrata rectarum AB,BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratū AD, in quo ducta diametro B E, ducatur ex C, ipsi BD, parallela C F, secans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela ipsi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum B C, A C, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt A B, ad AC, ita A C, ad C B; [b] erit rectangulum sub AB, BC, nempe A H, æquale ipsi I F, quadrato rectæ A C. Cum ergo A H, æquale sit ipsi C D; erit gnomon kLM, vna cum quadrato C H, duplus quadrati I F; Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum A D, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectæ B C, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.



b 17. sex.

ALITER. Quoniam est, vt A B, ad A C, ita A C, ad CB; [c] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeo rectangulum sub AB,BC, bis, vna

c 17. sex.

cum quadrato rectæ A C, triplum quadrati rectæ A C. a 27. secũ
Sunt autem quadrata rectarum A B, B C, simul æqualia quadrato rectæ A C, vna cum rectangulo sub AB, B C, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ A C. Quocirca si recta secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

SI recta linea inęqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmẽti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectã AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata A D, C H, tripla sint quadrati IF, dempto quadrato IF, erit gnomen KL M, *vna cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati I F: Est autem gnomen KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis A H, C D. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati I F; Ac proinde cum æqualia sint A H, & C D, erit A H, ipsi I F, æquale. Quapropter cum rectangulum A H, sub A B, B C, æquale sit quadrato I F, recta A C;* b *erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac propterea AB, diuisa erit in C, extrema & media ratione.* b 17. sex

ALITER. cum quadrata rectarum AB, BC, tripla sint quadrati recta AC; c *Sint vero quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato recta AC, & rectangulo sub AB, BC, bis; erit & quadratum recta AC, vna cum rectangulo sub A B, BC, bis, triplum quadrati recta AC. Dem* c 7. secũ





pto ergo quadrato recta A C, relinquetur rectangulum sub A B, B C, bis duplum quadrati rectæ
a 17. sex *AC. Et proinde rectangulum sub AB, BC, semel, æquale quadrato rectæ AC.* a *Quare vt prius erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoq; AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.*

EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremã & mediam rationẽ secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati: Et si recta linea inęqualiter secetur, totaq; assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta A B, secta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta B D, minori segmento B C, æqualis. Dico quadratũ ex AD, quintuplum esse



b 8. sec. *quadrati ex AC, maiore segmento.* b *Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub A B, B C, quater contento, vna cum quadrato ex AC:*
c 17. sex c *Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quod A B, A C, C B, sint continue proportionales.) erit rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectãgulum sub AB, BC, quater vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale ostensum est rectangulo sub A B, B C, quater, vna cum quadrato ex AC,) eiusdem quadrati ex A C, quintuplum erit. quod est propositum.*

SIT deinde recta AB, secta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori segmento B C, æqualis, sitque quadratum

ex AD, quadrati ex AC, maiori segmento quintuplum. Dico AB, in C, sectã esse extrema ac media ratione. [a] *Quoniã n. quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater, una cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum sub AC, BC, quater, una cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC; ac propterea rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC: hoc est, rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato ex AC.* [b] *Igitur erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, secta est extrema & media ratione. Quod est propositum.*

a 8. sec.

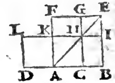
b 17. sex

THEOR. 5. PROPOS. 5.

iiij.

SI recta linea secũdam extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secũdum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quę à principio recta linea.

SECETUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori segmento AC. Dico rectam BD, secari in A, extrema ac media ratione, esseque maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi AF, parallela DL, occurrens ipsi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur est ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; [c] Erit rectangulum IF, contẽtum sub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC. [d] Est autẽ CK, ipsi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipsi AL; additoque communi BK, erit rectangulum BL, contentum

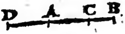


c 17. se.

d 36. pi

a17.sex sub BD,DA, æquale quadrato BF,rectæ A B; a Ac proinde erit vt B D,ad AB, ita AB,ad DA. Quare B D, secatur in A,extrema ac media ratione, estque maius segmentum A B.

ALITER. Quoniam est vt AB,ad AC, hoc est, ad AD,ita AC,ad CB;Erit conuertendo vt DA, ad A B, ita BC,ad CA;& componendo vt DB,ad AB,ita AB,ad C A, hoc est, ad AD. Secta igitur est BD, in A,extrema ac media ratione.Itaque si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei æqualis maiori segmento:tota recta linea, &c. quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

SI recta linea secetur extrema ac media rõne, detrahaturque ex maiori segmẽto segmentum minus; erit maius segmentum sectũ extrema ac media ratione,& maius segmentum est illa linea,quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RECTA enim linea BD,extrema ac media ratione secetur in A,cuius maius segmentum AB,minus autem segmẽtum AD,& ex maiori segmento AB,detrahatur recta A C, æqualis minori segmento AD. Dico maius segmentum A B diuisum esse in C,extrema ac media ratione,& maius segmẽtum esse rectam A C, quæ æqualis est minori segmento A D. Facta enim prioris figuræ cõstructione,cum sit vt BD,ad AB,
b17.sex *ita AB,ad AD,* b *erit rectangulum BL,contentum sub B D, AD,æquale quadrato BF,rectæ AB;& ablato cõmuni B K,*
c36 pri *erit AL, æquale ipsi IF;* c *Est autem A L, ipsi C k, æquale. Aequale igitur est I F, contentum sub A B, C B, quadrato*
d17.sex *CK,recta AC;* d *Ac proinde erit vt A B, ad A C, ita A C,*

ad

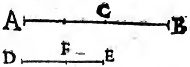
ad CB. Quare AB, secta est in C, extrama ac media ratione, cuius segmentum maius est AC, minus vero segmentum recta CB. Quod est propositum.

ALITER. Quoniam est vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc est, ad AC, detractam ex AB; a erit quoque ita AD, reliqua ipsius BD, hoc est, AC, ad CB, reliquam ipsius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc est, vt AB, ad AC; Ac propterea diuisa erit AB, in C, extrema & media ratione. Quod est propositum. a 19. quin

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Eritquoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitque DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse DF. Cum enim sit vt AB, tota ad



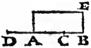
DE totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum vtrobique sit proportio dupla; b erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam; Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE. c Quoniam vero est, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum. b 19. quin c 15. quin

THEOR. 6. PROPOS. 6. vi

S I recta linea Rationalis extrema ac

media ratione ſecetur; Vtrumque ſegmentorum Irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumque ſegmentum AC, CB, eſſe lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori ſegmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius
a 1. tertij dec. AB. a Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum eſt quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad



quadratum rectæ AD, proportionem,
b 6. dec. quam numerus ad numerum. b Quare commenſurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea que ipſæ rectæ CD, AD, commenſurabiles quoque exiſtent, ſaltem potentia: Eſt autem AD, Rationalis, cum ſit dimidia lineæ Rationalis AB, Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim propor-
c 9. dec. tionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) c erunt rectæ CD, AD, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum
d 74. dec commenſurabilis; d erit reliqua AC; Irrationalis, quæ appellatur Apotome.

RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento
e 17. ſex ſub AB, CB; cum ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; e erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apotomæ AC, nimirum rectangulũ AE,
f 98. dec applicatum ſecundum lineam Rationalem AB, f facit alterum latus BE, hoc eſt, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano oſtendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sitque maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa enim A C, bifariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cũ sit ipsi AC, commensurabilis. a Quoniam autem quadratum recta B D, quintuplum est quadrati recta C D; habebunt a 3.tertijdeci. *quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum;*

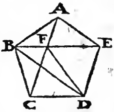


b ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsa recta BD, CD, commensurabilis erunt, saltem potentia. Cum b 6.dec. *igitur CD, sit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionẽ, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionẽ, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt recta BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde si à Rationali BD, detrahatur C D, Rationalis potentia tantum commensurabilis; c erit reliqua CB, Irrationalis, qua vocatur Apotome.* c 74.deci

THEOR. 7. PROPOS. 7. vii.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: Aequiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, B D; & ex puncto F, vbi se intersecãt rectæ BE, AC, recta ducatur FD. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli ABE, equalia sunt



lateribus C B , C D , trianguli CBD, & anguli quoque ipsis cōtenti æquales, ex hypothesi; a erunt & bases BE, B D, & anguli A E B, CDB, æquales; b Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia sint ostensa latera BE, BD; Toti igitur anguli A E D, CDE, æquales erunt. Rursus quia latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoque ipsis contēti æquales, ex hypothesi: c Erit & basis BE, basi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales sint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; d erunt quoque latera BF, AF, æqualia; Ac propterea si ipsa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera FE, ED, trianguli F E D, æqualia sint lateribus FC, CD, trianguli FCD; & basis communis FD; e erunt & anguli dictis lateribus contenti F E D, F C D, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, ostensi æquales. Aequales igitur sunt toti anguli AED, BCD; Ac proinde cum angulo AED, ostēsus sit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipsum pentagonum.

a 4. pri.
b 5. pri.
c 4. pri.
d 6. pri.
e 8. pri.

SINT secundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti, æquales, ex hypothesi; f Erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; g Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia ostensa sint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonstratum est, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

f 4. pri.
g 5. pri.

THEOR. 8. PROPOS. 8. xj.

SI pentagoni æquilateri,& æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant,& maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis,qui ſunt deinceps C, D, rectę DB, CE, ſe mutuo ſecantes in F. Dico ipſas ſecari extrema ac media ratione, maioraque earum ſegmenta FB, FE, æqualia eſſe lateri cuilibet pentagoni. [a] Deſcripto enim circulo circa pentagonum; [b] erũt quinque arcus AB,BC,CD,DE,EA, æquales.Quia vero latera CD,CB,trianguli CDB, æqualia ſunt lateribus DC,DE,trianguli DCE;& anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; [c] Erunt & baſes DB,CE,& anguli CDB,DCE,æquales; Ac proinde cum in triangulo CDF,duo anguli FCD,FDC,ſint æquales,[d] & ipſis æqualis ſit externus angulus BFC:erit angulus BFC,duplus anguli DCE:[e] Eſt autẽ & angulus BCE, eiuſdem anguli DCE,duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, ſit duplus. Igitur anguli BFC, B C F, æquales ſunt; [f] Ideoque recta BF,lateri pentagoni BC,æqualis. [g] Quoniam autem anguli DBC,ECD, arcubus æqualibus inſiſtentes æquales ſunt;erunt duo anguli DBC,CDB,trianguli BCD,æquales duobus angulis DCF,FDC, trianguli C F D. [h] Ac proinde æquiangula erunt triangula B C D, CFD.[i] Quare erit vt BD,ad DC,hoc eſt,ad BF, æqualem ipſi DC,ita CD,hoc eſt,ſibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD,ſecta eſt in F,extrema ac media ratione,eſtq; maius ſegmentum BF,lateri pentagoni æquale,vt oſtenſum eſt.Simili ratione oſtendemus, rectam CE, ſecari in F,extrema ac media ratione, maiuſque illius ſegmẽtum



a 14. quarti.
b 28. ter.
c 4. pri.
d 32. pri.
e 33. ſex.
f 6. pri.
g 27. ter.
h 32. pri.
i 4. ſexti.

EF, ęquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni ęquilateri & ęquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.

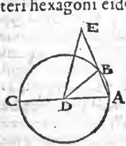
SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelam esse opposito lateri; hoc est, BD, parallelam esse lateri AE, & CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum,
a22.ter *a Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC, inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales, erunt etiam A, & AEC, duobus rectis*
b28.pri *æquales: b ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod est propositum.*

ix. THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectū addatur BE, ęqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico EA, rectam sectam esse in B, extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse EB, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diameter AC, coniunganturque rectę DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius peripherię circuli: continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies: Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. c Quare & angu-



c33.sex lus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt ęqualia, nempe latera hexagoni: (est

enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex co roll. propos. 15. lib. 4.) [a] erunt & anguli BDE, BED, æquales: [b] quibus cum æqualis sit externus ABD: erit angulus ABD, duplus anguli BED: [c] Est autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, simul quadrupli erũt anguli BED. [d] Cum ergo angulis D A B, D B A, æqualis sit externus BDC, erit angulus BDC, quadruplus eiusdẽ anguli BED: Atqui idem angulus BDC, ostensus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli A D E, æquales sint duobus angulis ADB, BAD, trianguli A B D, [e] erunt triangula ADE, ABD, æquiangula. [f] Igitur erit vt E A, ad AD, hoc est, ad EB, ipsi AD, æqualem, ita AD, hoc est, EB, sibi æqualis ad BA: Atque idcirco recta EA, secta est in B, extrema & media ratione, estque maius segmentum EB, latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum.

a 5. pri.
b 32. pri
c 5. pri.
d 32. pri
e 32. pri
f 4. sex.

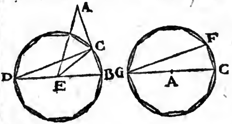
SCHOLIVM.

QVIA vero demonstrauimus ad propos. 5. huius lib. si minus segmentum lineæ diuisæ extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur, maius segmentum secari quoque extrema & media ratione, eiusque segmentum maius esse minus segmentum detractum. Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni, secari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni secetur extrema & media ratione, maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, diuisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propos. 5. huius lib. ostendimus. Hoc tamen aliter demonstrabimus lib. 14. propos. 4.

CONVERSVM quoque huius theorematis facile cum Campano demonstrabimus. Videlicet.

SI lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentũ latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

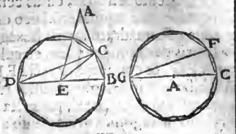
SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione, ſitque primum AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus ſegmentum CB, eſſe eiuſdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur recta EA, EC. Quia ergo eſt, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & eſt AC, latus hexagoni æquale ſemidiametro EB, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Erit quoque vt AB ad BE,



a 6. ſex. *ita EB, ad BC.* a *ideoque triangula ABE, EBC, æquiangula erunt, cum habeant latera circa cõem angulum B, proportionalia; eritq; angulus A, angulo BEC, æqualis. Rurſus quia latera CA, CE, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni;* b *erunt*
b 5. pri. *anguli CAE, CEA, æquales;* c *quibus cum æqualis ſit exter-*
c 32. pri *nus BCE, erit BCE, duplus anguli A:* d *Eſt autem angulo*
d 5. pri. *BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, ſimul quadrupli erunt eiuſdem anguli A.*
e 32. pri e *Cum ergo angulis BCE, CBE, æqualis ſit externus CED; erit quoque angulus CED, eiuſdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus.*
f 33. ſex f *Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus ſemicirculi BCD, eiuſdem arcus BC, quintuplus*

exiſtet,

existet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta EC, latus est decagoni.

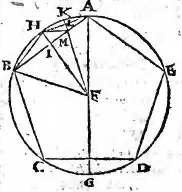


SIT deinde CB, minus segmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius segmentum AC, esse eiusdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rursus BC, in circulo BCD; ducaturque diameter BED. Deinde interuallo AC, describatur circulus CFG, cuius diameter CAG; eritque ex coroll. propos. 15. lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniam igitur AB, secta est in C, extrema ac media ratione, estque maius segmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt iam ostensum est, minus segmentũ CB, latus decagoni eiusdem circuli CFG. Describatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterum & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD, decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; eruntque latera BC, CF, inter se æqualia. Quoniã vero, si connectantur rectæ CD, FG, anguli CDB, FGC, sunt æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostendimus, quod insistãt arcubus similibus BC, CF, nempe decimis partibus peripheriarum; & sunt quoque anguli BCD, CFG, in semicirculis æquales,[a] nimirum recti:[b] Erunt quoque latera BD, CG, [a] 31. ter *inter se æqualia. Quam ob rem cum diametri BD, CG, sint æquales, æquales quoque erunt circuli BCD, CFG. Ac proinde, cum recta AC, sit latus hexagoni circuli CFG, erit quoque eadem recta AC, latus hexagoni circuli BCD. Quod est propositum.* [b] 36. pri

THEOR. 10. PROPOS. 10. x.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterũ. Dico quadratum lateris A B, æquale esse quadrato lateris hexagoni, vna cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta F B. Diuiso deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, secans rectam AB, in I; eritque recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, secans rectam A H, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Quoniã igitur
a 27.ter arcus AH, BH, æquales sunt; [a] erunt & anguli ipsis insistentes AFH, BFH, æquales. Quare cum latera A F, FI, trianguli AFI, æqualia sint lateribus BF, FI, trianguli BFI, & an-
b 4.pri. guli ipsis contenti æquales quoque; [b] erunt & bases A I, BI, æquales, & anguli A I F, BIF, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectę AL, HL, & anguli ALF, HLF, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus A B C G, AE D G, demantur æquales arcus ABC, AED; relinquentur arcus CG, DG, inter sese æquales, ideoque erit arcus C G, dimidium arcus C D. Est autem & arcus A H, dimidiũ arcus A B. Igitur cum



arcus A B, CD, æquales sint; erunt quoque eorum dimidij arcus C G, A H, æquales; Ac proinde cum arcus AH, duplus sit arcus HK, erit & arcus C G, duplus eiusdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus A B, BC, æquales sunt, & est arcus A B, duplus arcus B H, erit etiam arcus BC, eiusdem arcus BH, duplus. Quare arcus C G, BC, æquemultiplices sunt, nempe dupli, arcuum HK, BH;
c 1. qn. [c] Ac propterea totus arcus B G, duplus quoque erit to-
d 33.sex tius arcus BK, [d] & idcirco angulus quoque B F G, duplus
e 20.ter anguli BFK: [e] Sed quia idem angulus B F G, ad centrum duplus est quoque anguli FAB; erunt idcirco anguli BFM,

FAB,

FAB, æquales; a Ac propterea triãgula ABF, FBM, cum habeāt angulos FAB, MFB, æquales, & angulum ABF, communem, æquiangula erunt. b Quocirca erit vt AB, ad BF, ita BF ad BM; c ideoque rectangulum sub AB, BM, ęquale erit quadrato rectæ BF. a 32. pri b 4. sex. c 17. sex

RVRSVS quia latera AL, LM, trianguli ALM, æqualiã sunt lateribus HL, LM, trianguli HLM, & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti; d erunt & bases AM, HM, & anguli LAM, LHM, æquales: e Est autem angulus LAM, angulo HBA, ęqualis, quod & latera HA, HB, æqualia sint. Igitur & angulus LHM, eidem angulo HBA, æquals erit; f Ac propterea triangula ABH, AHM, cum habeant angulos ABH, AHM, æquales, & angulum HAM, communem, æquiangula erunt. g Quam ob rem erit vt AB, ad AH, ita AH, ad AM; h ideoque rectangulum sub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Ostensum est autem & rectangulum sub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, simul æqualia sunt quadratis rectarum BF, AH. i At vero rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, æqualia sunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, ęquale est quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum. d 4. pri. e 5. pri. f 32. pri g 4. sex h 17. sex i 2. secũ.

COROLLARIVM I.

HINC sequitur, lineam rectam. quę ex centro diuidit arcum quempiã bifariã, diuidere quoque rectã illi arcui subtẽsam bifariã, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, propterea quod arcum AB, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos: Demonstratum enim est,

diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppositum C D, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum, secabit quoque latus CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatero in circulo descripto, si numerus laterum fuerit impar, vt constat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxim quandam ex Ptolemeo tradidimus, qua vna eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterũ describitur, eiusque demonstrationem in hunc locum distulimus; paucis nunc a nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro B C, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æqualis abscindatur E F, adiungaturque recta AF. Dico rectam A F, esse latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim

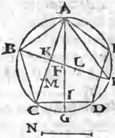


a 6. sec. *CD, secta sit bifariam in E, eique addita DF, a erit rectangulum sub CF, D F, vna cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ EF, ideoque quadrato rectæ EA, quæ ipsi EF,*
b 47. pri *est æqualis. b Est autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectangulum sub C F, D F, vna cum quadrato rectæ DE, æquale est quadratis rectarũ AD, DE; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum sub CF, DF, æquale quadrato re-*
c 17. sex *ctæ AD, hoc est, quadrato rectæ C D. c Quam ob rem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF, proptereaque recta C F, diuisa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius segmentum CD, sit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propos. 15. lib. 4. erit minus segmentum DF, latus decagoni eius-*
d 10. ter tij decimi. *dem circuli, vt demonstrauimus ad propos. 9. huius lib. d Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, vna cum quadrato lateris decagoni DF, æquale est quadratum lateris pẽ-*
e 47. pri *tagoni eiusdem circuli; e Est autem eisdem quadratis rectarum AD, DF, æquale quadratum rectæ AF; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ A F; ac propterea recta AF, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.*

THEOR. 11. PROPOS. 11. xii.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo A B C D E, habente diametrum Rationalem; describatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico eius latus A B, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, secetque AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AC, AH, quarum A C, secet diametrum B H, in K. Abscindatur quoque ex semidiametro F H, quarta eius pars F L: Item ex recta A C, quarta eius pars C M. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis; erunt quoque



FL, BF, illi commensurabiles, cum sint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota BL, composita,[a] cum sit commensurabilis vtrique FL, BF, Rationalis erit. a16.dec

RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta secat arcum AC, bifariam in B; secabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propos. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propos. Triangula ergo ACI, AFK, cum habeant angulos A I C, AKF, rectos, & angulum CAI, communem, [b] æquiangula inter se erunt. [c] Quamobrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA, siue ad FH, ipsi FA, æqualem. [d] Vt autem CA, ad FH, ita est CM, quarta pars ipsius CA, ad FL, quartam partem ipsius F H. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando, vt CI, ad CM, hoc est, vt CD, dupla ipsius CI, ad C K, duplam ipsius CM, ita FK, ad F L; Atque componendo, vt C D, C K, simul ad C K, ita F k, FL, simul, nimirum recta K L, b32.pri c3.sex. d15.qu



a 22. sex ad FL; a Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compositæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratũ rectæ KL, ad quadratũ rectę FL. Quia vero si AC, secetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD,) b maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirũ ipsi c CD; Erit quadratum rectę cõpositæ ex CD, maiori segmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ C K, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ K L, quintuplum erit quadrati rectæ FL, d ideoque quadratum rectæ K L, commensurabile erit quadrato rectæ FL; Ac proinde rectæ K L, F L, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autem FL, ostensa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

b 8. tertij decimi.

c 1. tertij decimi.

d 6. dec.

DEINDE quia qualium partium 4. est BF, talium 1. est FL; ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est F L: erit quadratum rectæ B L, talium partium 25. qualium 1. est quadratum rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. e habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium vero partium 1. est quadratum rectæ F L, talium 5. ostensum est quadratum rectæ KL. Qualium igitur 25. est quadratum rectæ BL, talium 5. est quadratum rectæ KL; ac proinde quadratũ rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ K L. Quia ergo quadrata rectarum B L, KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ, (vt patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) f Erunt rectæ B L, K L, longitudine incommensurabiles: ideoque, cum ostẽsæ sint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rationali BL, dematur Rationalis KL, potentia tantum commensurabilis; g erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei vero congruens erit KL.

e 20. sex

f 9. dec.

g 74. dec

IAM vero recta BL, possit plus, quam recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratum rectæ B L, æquale est quadratis rectarum K L, & N; Qualium autem

partium 5. fuit quadratum rectæ B L, talium 1. fuit quadratum rectæ KL. Erit reliquum quadratum rectæ N, talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum B L, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. a Quare commẽsurabilia erunt; propterea que rectæ ipsę B L, & N, commensurabiles, saltem potentia; Est autem BL, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia vero quadrata rectarum BL, & N, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) b Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potẽtia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta B L, Rationalis longitudine sit commensurabilis Rationali BH; (Qualium enim partium 8. est BH, talium 5. est BL,) possitque plus, quam congruẽs KL, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, vt ostensum est; Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.

a 6. dec.

b 9. dec.

POSTREMO quia recta A B, est media proportionalis inter BH, BK, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (quod triangulum ABH, c habeat angulum B AH, rectum, à quo ducta est A K, ad basin perpendicularis) d erit quadratum rectæ AB, æquale rectãgulo sub BH, BK. Quocirca cũ superficiem contentam sub Rationali B H, & Apotoma quarta BK, possit recta linea AB; e Erit A B, linea Minor, &c. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

c 31. ter

d 17. sex

e 95. dec

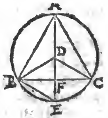
THEOR. 12. PROPOS. 12.

viij.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplũ est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum ęquilaterum inscribatur A B C. Dico quadratum lateris

AB, triplum esse, quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro A E, quæ secet, ex coroll. 2. propos. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectam BC, bifariam quoque, & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus B C, sit tertia pars totius peripheriç; erit arcus BE, eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoque coniuncta recta BE, latus erit hexagoni, & æqualis semidiametro circuli, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus A BE, continet tres sextas partes totius circuli; arcus vero A B, cum sit tertia pars totius circuli, duas sextas comprehendit eiusdem circuli. Igitur arcus BE, sexta pars est eiusdem, ac proinde recta BE, latus est hexagoni, & æqualis semidiametro DE, ex coroll. propos. 15. lib. 4.



a 47. pri [a] Quoniam igitur quadratum rectç A E, æquale est quadratis rectarum AB, BE, [b] quod angulus A B E, in semicirculo rectus sit;
b 31. ter Est autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ BE, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea A E, dupla sit lineæ BE; erunt quadrata rectarum AB, BE, simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ B E; Ac propterea qualium partium 4. sunt quadrata rectarum A B, BE, talium partium 1. erit quadratum rectæ B E; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ A B. Quare quadratum rectæ AB, triplum est quadrati rectæ BE, quæ æqualis est semidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.



SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia esse sesquitertiam lateris trianguli çquilateri in eo circulo descripti. Nam cum latus AB, ostensum sit potentia triplum semidiametri AD, posito quadrato ex A B, 3. erit quadratum ex A D, 1. atque adeo quadratum ex AE, quod ex scholio propos. 4., lib. 2. quadruplum est quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex, AE, quadrati ex AB, sesquitertium est, hoc est, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET

ET quia ex coroll.propol.8.lib.6.vt est AE,ad AB, ita se habet AB,ad AF;erit quoque latus trianguli æquilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad basim demissæ potentia sesquitertium: quod tamen aliter demonstrabitur ab Euclide lib.14. propos.12.

COROLLARIVM II.

HINC facile etiam colligi potest,semidiametrum DE, bifariam secari in F,a latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BE;si ponatur quadratum rectæ AB, partium 12.erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. a Est autem quadratum rectæ BE, æquale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partium 4.erunt quadrata rectarum BF, FE. Est autem taliũ partium 3.quadratum rectæ BF, (quod quadratum rectæ AB, quadruplum sit quadrati rectæ BF,ex scholio propos.4.lib.2.Est enim AB,dupla ipsius BF.) Igitur talium 1.erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratum rectæ BE,hoc est,quadratum rectæ DE, sibi æquale,quadruplum erit quadrati rectæ FE.Igitur ex scholio propo. 4.lib.2.recta DE,dupla erit ipsius FE.Quocirca DE, bifariam secatur in F. a 47.pri

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate proposito.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque vicissim bifariam,& ad angulos rectos secabitur a latere opposito.

IN circulo ABC,cuius centrum D,triangulum æquilaterum inscribatur ABC. Dico rectam AE, per centrum D, ductam, hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum BAC,& latus BC,necnon ad angulos rectos;Semidiametrũ quoque DE,secari a latere BC,bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD,CD,BE;cum latera AB, AD,

æqualia



æqualia sint lateribus AC, AD, trianguli CAD; & bases BD, CD, æquales quoque: a 8. pri. *a Erunt anguli BAD, CAD, æquales. Quod est primum.*

DEINDE, cum latera AB, AF, trianguli BAF, æqualia sint lateribus AC, AF, trianguli CAF, & anguli ipsis contenti æquales ostensi: b 4. pri. *b Erunt & bases BF, CF, & angulo ad F, æquales, ideoque recti. Quod est secundum.*

POSTREMO, cum anguli BAE, CAE, demonstrati sint esse æquales; c 26. ter *c erunt & arcus BE, CE, æquales. Quare cum BEC, arcus sit teria pars circumferentiæ, erit BE, sexta pars eiusdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque semidiametro proinde BD, æqualis, ex coroll. propos. 15. lib. 4.* d 5. pri. *d Igitur anguli BDE, BED, æquales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, æquales sunt angulis BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune;* e 26. pri *e Erunt & latera DF, EF, æqualia. quod est tertium.*

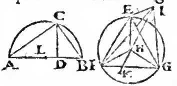
xiii.

PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra complecti; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT datæ sphæræ diameter AB, circa quam semicirculus describatur ABC; & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AD, ipsius DB, dupla; at vero AB, eiusdem DB, tripla; & ipsius AD, sesquialtera. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ HE, quæ æqualis sit ipsi DC, describatur circulus EFG, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inscribatur EFG, adiunganturq; rectæ HF, HG, quæ singulę ęquales erunt ipsi DC, cum æquales sint ipsi

HE, ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD,& ex I, demittantur rectæ IE,IF,IG. Dico solidum



contentum quatuor triangulis FEG,IEF,IFG,IEG,esse Pyramidem,siue Tetraedrum. Quoniam enim latera DA, DC,trianguli ADC,æqualia sunt lateribus HI,HE,trianguli IHE,& anguli ipsis contenti,recti, ex hypothesi, & 3.defin.lib.11.[a] erit basis AC,basi IE,æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam AC,æqualem esse rectis IF, IG. Rursus quia tres lineę AD,DC, DB, proportionales sunt ex coroll.propos.8.lib.6.erit, ex coroll. propos. 20. lib.6 vt AD,ad DB,ita quadratum rectę AD, ad quadratum rectæ DC;& componendo,vt AB,ad DB,ita quadrata rectarum AD,DC,simul ad quadratũ rectæ DC.[b] Sunt autem quadrata rectarum AD,DC,æqualia quadrato rectę AC. Igitur erit quoque vt AB, ad DB, ita quadratum rectæ AC,ad quadratum rectæ DC; Ac proinde cũ AB, sit ipsius DB,tripla,erit quoque quadratum rectę AC, triplum quadrati rectę HE, cum HE, ęqualis sit ipsi DC: [c] Atqui & quadratum rectę EF,triplum quoque est eiusdem quadrati rectę HE. Quadratum ergo rectę AC,quadrato rectę EF,æqualę erit;& propterea recta AC, rectę EF. Quare cum recta AC, ostensa quoque sit ęqualis rectis IE,IF,IG;erunt quatuor triangula EFG, EFI, FGI, GEI,æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur iam est pyramis,seu Tetraedrum,cuius basis EFG,vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cuius diameter AB;& diametrum sphæræ AB,potentia sesquialteram esse lateris EF,vel AC.

a 4.pri

b 47.pr

c 12.te rtijdeci

EXTENDATVR perpendicularis IH, vsque ad K, vt sit HK,ipsi DB, & tota IK, toti AB, æqualis. Quia ergo tres rectæ AD, DC, DB, proportionales sunt, quibus æquales existunt tres IH, HE, HK; erunt quoque IH, HE,HK, proportionales. Quare cum HE, sit ad IK perpendicularis,& media proportionalis inter IH, HK, se-

micir-

micirculus circa I K, deſcriptus in plano rectarum I K, HE, tranſibit per E, vt mox oſtendetur; Eodemque argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam IK, deſcriptus in plano rectarum IK, HF, tranſibit per F, quam ſemicirculus circa eandem I K, deſcriptus in plano rectarum IK, HG, per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quod diameter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehendetur idem Tetraedrum ſphæra data.

QVONIAM vero tres rectæ AB, AC, AD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt AB, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta AB, ſeſquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. eſt AB, talium 2. ſit AD. Igitur & quadratum rectæ AB, ſeſquialterum erit quadrati rectæ AC; Ac propterea cum AB, ſit diameter ſphæræ, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqualis; perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia ſeſquialteram eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus, & data ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

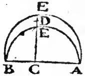
LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, deſcriptus, tranſeat per E, facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT

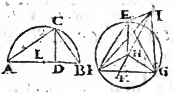
SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico semicirculum circa AB, descriptum transire per D. Nam si transeat citra D, vel vltra, nimirum per punctū E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propos. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quā quadratum rectæ CE, [a] *æquale erit rectangulo sub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarū CD, CE, inter se æqualia, & ipsæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Transibit ergo semicirculus per D.* [a] 17. sex



HINC manifestum est, semicirculum in superiori figura descriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, transire per E, cum HE, sit ad Ik, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.

HINC facile colligemus, diametrum sphæræ esse potentia quadruplam sesquialteram semidiametri circuli circa basim pyramidis descripti. Cum enim diameter sphæræ AB, ostensa sit potentia sesquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium *6.* qualium *9.* est quadratum rectæ AB: At qualium partiū *6.* est quadratum rectæ EF, talium partium *2.* est quadratum rectæ HE, [b] quod quadratum rectæ EF, triplum sit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium *9.* est quadratum rectę AB, talium partium *2.* erit quadratum rectæ HE; Ac propterea diameter sphæræ AB, potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri HE, cum proportio quadratorum sit, quæ *9.* ad *2.* [b] 12. tertijdec.



COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis py-

ramidis demissa, sexta pars erit diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. Sit enim L, centrum semicirculi ACB, eritque L, centrum quoque sphæræ. Dico rectam L D, (quæ nimirum ex centro sphæræ ad basin EFG, ducitur perpendicularis; cum AD, æqualis sit ipsi IH, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idē est, quod centrum sphęræ) esse sextam partem diametri sphæræ, nempe rectæ A B, & tertiam partem semidiametri A L. Quoniam enim AD, dupla est ipsius DB; Qualium partium 4. est AD, talium 2. erit DB: ac proinde talium 6. tota A B, & semidiameter AL, talium 3. Quare si AD, est 4. & A L, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, sexta pars erit rectæ A B, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ A L, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo pyramidis H I, duas tertias partes continebit ipsius diametri. Est enim HI, eadem, quę AD, continens duas tertias diametri, ex constructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. est duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, facile ex ipsis rite inter se complicatis componetur Tetraedrum, secundū totam soliditatem. Hanc vero praxim, & sequentes quatuor, quibus reliqua quatuor solida regularia in materia quauis sensibili conficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durero non ignobili scriptore.



XV. PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem; & demonstrare, quod sphęræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.

SIT sphæræ, quæ constitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB, & ex centro D, ad A B, perpendicularis duca-

tur DC, connectanturque rectæ AC, BC, [a] quæ æquales inter se erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis sit ipsi AC, vel BC, describatur super eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, se mutuo secantes in I: eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cum sint semidiametri circuli circa quadratũ descripti, vt in 4. lib. demonstratũ est. Deinde ex I, in vtramq; partẽ ad planũ quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipsi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico solidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, esse octaedrum, quod quæritur. Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia sunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At vero EIG, [b] eo quod sit æqualis angulo GIH, sibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH.) [c] Erit & basis EK, basi EH. æqualis; Eodemque modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula esse æquilatera; atque adeo æqualia triangulo KEH, cum illorum latera æqualia sint lateribus quadrati EFGH, singula singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis equilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi sphæra diametri AB, qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphæræ AB, potentia duplam esse lateris EF, vel AC.

a 4. pri.

b 8. pri.

c 4. pri.

QVONIAM enim IE, perpendicularis est ad KL, ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI, IL; (quod tres rectæ KI, IE, IL, æquales sint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, descriptus transibit per punctum E, ex lemmate præcedentis propos. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, de-

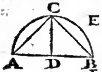
scribet

ſcribet ſphæram,quæ complectitur octaedrum conſtitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hæc ſphæra æqualis ſit datæ ſphæræ, cuius diameter AB; (Nam cum rectæ AC, EF, æquales ſint, ideoque ipſarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ FE, quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ AD, EI, hoc eſt, KI, ſemidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde ſphæræ ipſarum æquales exiſtent.) comprehendetur idem octaedrum data ſphæra.

a 47. pri QVIA vero quadratum rectæ AB, ᵃæquale eſt quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia ſunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cum AB, ſit diameter ſphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris octaedri. Itaque octaedrum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

EX dictis manifeſtum eſt, in octaedro tres diametros ſe mutuo ad angulos rectos ſecare in centro ſphæræ: quales ſunt KL, EG, FH, ſecantes ſeſe in I. Omnes enim anguli ad I, oſtenſi ſunt recti. Atque proinde, cum KI, recta ſit ad lineas EG, HF:
b 4. vndecimi. b recta quoque erit ad planum EFGH, per ipſas ductum: c Ideoque & plana KFLH, ELGK,
c 18. vndecimi. per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione,





vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, ſe mutuo ad angulos rectos ſecabunt: Quæ quidem plana ſunt quadrata, cum omnia eorũ latera ſint ipſius octaedri latera, ac proinde æqualia exiſtant inter ſe, comprehendantque angulos rectos, eo quod (cum quadratum diametri ſphæræ duplum ſit quadrati lateris octaedri, vt oſtendimus,) quadratum diametri HF, æquale exiſtit quadratis laterum octaedri Fk, kH.
d 48. pri d Ita enim efficitur, vt angulus FkH, rectus ſit. Eademque eſt ratio de cęteris angulis.

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales, quarum baſis communis, eſt quadratum EFGH, vertices vero

K,& L;altitudines denique,femidiametri IK,IL:cuiufmodi funt pyramides E F G H k . E F G H L. Nam plana vnius funt fimilia & æqualia planis alterius,vt conftat,cum fint triangula æquilatera,& æqualia, pręter bafin communem, quæ eft quadratum fubduplum quadrati diametri fphæræ, vt eft demonftratum.

COROLLARIVM. III.

SI tetraedrũ,& octaedrum in eadem fphæra defcribantur,erit te traedri latus potentia fefquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri fphæræ diuifum in fex partes. a Quoniam igitur diameter fphæræ eft potentia fefquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. eft quadratum diametri fphæræ. b Rurfus quia diameter fphæræ eft potentia dupla lateris octaedri,erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. quadratum diametri fphæræ.Igitur cum talium partium 4. fit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. eft quadratum lateris octaedri;perfpicuum eft,latus tetraedri potentia fefqui tertium effe lateris octaedri.

a 13. tertijdec.

b 14. tertijdec.

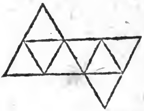
COROLLARIVM IIII.

DENIQVE,quia in quadrato EFGH,recta EH,parallela eft rectæ FG;& in quadrato ELGK,recta EK,rectæ GL:c Erit planum E H k, per EH,EK,ductum plano FGL,per FG,GL,ducto parallelum.Cum igitur eadem fit ratio de cæteris bafibus octaedri, efficitur, bafes octaedri oppofitas inter fe parallelas effe.

c 15. vndecimi.

SCHOLIVM.

QVOD fi ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter fe æqualia, difponanturque, vt hac figura indicat, facile ex ipfis rite inter fefe complicatis componetur octaedrum fecundum totam foliditatem, vt ait Albertus Durerus.

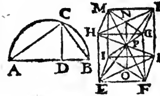


PROBL. 3. PROPOS. 15. xiiij.

CVBVM conftituere : & fphæra complecti, qua & priores figuras ; & demonftrare,quod fphęræ diameter potentia fit tripla lateris ipfius cubi.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AB, ipsius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Super rectam EF, quæ rectæ BC, sit æqualis, quadratum cõstituatur EFGH, super quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoque ipsi BC, quarum extrema coniungantur rectis IK, kL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, FK, ad planum

a 6. vndecimi. EFGH, rectæ sunt; a erunt rectæ EI, FK, parallelæ:



Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis posita sit ipsi BC, hoc est, ipsi

b 33. pri EF. b Igitur & EF, IK, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammum est EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, K F, æquales

c 34. pri sint ipsi EF, omnes quatuor lineę æquales existunt: c Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI, æquales sint oppositis angulis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IKLM, quadratum

d 24. vndecimi. erit, d cum simile sit & æquale quadrato opposito EFGH. Est enim EL, solidum parallelepipedum, e quod eius plana

e 15. vndecimi. opposita sint parallela, nimirum per lineas parallelas se mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi sphęra diametri AB. Sint enim planorum oppositorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM, HL, per quas ducantur plana EkLH, FIMG.

f 28. vndecimi. f Quia igitur tam planũ EKLH, quã FIMG, cubũ bifariã secat; vtrumque per centrum cubi transibit, ex scholio propos. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiusdem propos. se mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum sectio, recta scilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana EKLH, FIMG, rectangula sunt, (Cum enim HE, perpendicularis sit duabus rectis EI, EF,

ob

ob quadrata EM, EK; [a] perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideoque & ad rectam EK, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus est HEK. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, necnon & anguli in plano FIMG Rectangula ergo sunt plana EKLH, FIMG,) & æqualia, quod latera vnius æqualia sint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, vt constat ex scholio propos. 24. lib. 1. Ac proinde & semidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI. æquales erunt. Quare semicirculus circa EL, ex centro P, descriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, sphæram describet per omnes cubi angulos transeuntem; quam quidem æqualem esse sphæræ diametri AB, ita demonstrabitur. a 24. vndecimi.

CVM quadratum rectæ EK, [b] æquale sit quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL: Erunt quadrata recarum Ek, KL, tripla quadrati rectæ KL. [c] Est autē quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc est, quadrati rectæ BC: At vero eiusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nā tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipsius BD, sit tripla: erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt; ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarum sphæræ æquales existunt. b 47. pri. c 47. pri.

QVIA vero ostensum est quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi KL, manifestum est, diametrum sphærę potentia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

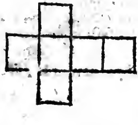
EX demonſtratione huius problematis manifeſtum eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atque eadem ratione rectas, quæ centra quadratorum oppoſitorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales eſſe, ſeſeque mutuo bifariam ſecare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppoſitorum GHML: EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione oſtendetur.
a 29. pri Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales ſunt duobus angulis NMP, NPM, trianguli NMP: (a Nam angulus OFP, æqualis eſt alter
b 16. vndecimi. no NMP, inter lineas FI, GM, b quæ parallelæ ſunt, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum E F K I, GHML, c & angulus
c 15. pri OPF, æqualis eſt oppoſito ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum ſint ſemidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam ſecabitur in P. Eademque eſt ratio de cęteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppoſitorum.

COROLLARIVM II.

d 13. tertijdec. RVRSVS potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt potentiis laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis. d Nam qualium partium 9. eſt quadratum diametri, talium 6. eſt quadratũ lateris tetrae-
e 15. tertijdec. dri. e Qualium vero partium 9. eſt idem quadratum diametri, taliũ 3. eſt quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrũ ſphæræ deſcripto, in quo latus tetraedri eſt AC,
f 47. pri. cubi vero BC. f Perſpicuum autem eſt, diametrum ſphærę A B, poſſe & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, ſit rectus.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rite complicentur inter ſe. Efficietur enim ex illis figura quædam ſolida octo angulos ſolidos continens inſtar teſſaræ cuiuſpiam, vt conſtat.



PROBL. 4. PROPOS. 16. xvj.

ICOSAEDRVM constituere:& sphera complecti,qua & ante dictas figuras; & demonstrare,quod Icosaedri latus Irrationalis est linea,quæ vocatur Minor.

SIT sphæra,quæ prædictas figuras comprehendit,diameter AB,circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB,abscindatur quinta pars B D, vt A B, ipsius B D, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta; At vero AD,ipsius BD,quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB,connectantur rectæ AC, B C. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi B C, sit æqualis,circulus describatur ex centro E;a in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L,M,N,O,P,connectantur rectæ FL, LG,GM,MH,&c.nempe latera decagoni.Deinde ex centro E, & punctis L,M,N,O, P, ad planum circuli F G H I K, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, O V, PX, quæ æquales ponantur semidiametro E F, seu rectæ BC.Eruntque omnes inter se æquales; b sed & parallelæ sunt.Igitur rectæ, quæ illas coniungunt,nempe EL, QR, EM, QS;EN, QT; EO, QV; EP,QX. (quas tamen omnes,vt vitaremus confusionem,non duximus.) c binæ inter se æquales erunt: Ac proinde cum æquales sint E L, E M, &c. semidiametro EF;æquales quoque erunt QR, QS,QT,QV, QX, & inter se,& semidiametro EF, seu rectæ BC. d Quia vero planum per rectas QR,QS, ductum parallelum est plano FGHIK,per rectas EL,EM, ducto: eademque ratione planum per rectas QS,QT,ductum parallelum est plano eidem FGHIK,per rectas EM,EN,ducto,conuenit autem planum per rectas QR,QS, cum plano per QS,QT,in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quæ ad propos. 16.lib.11.ostendimus.Non aliter ostendemus planum per QT, QV,cum hoc plano efficere vnum planum; necnon planum per

a 11. quarti.

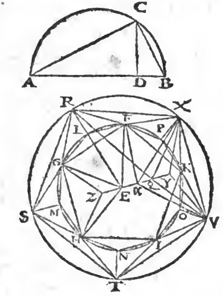
b 6. vndecimi

c 33. pr

d 15. vndecimi

QV, QX; & planum per QX, Q R. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum Q R, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R, S, T, V, X, rectis AS, ST, TV, VX, XR. a Quia igitur L R, P X, æquales sunt, & parallelæ; si concipiatur duci recta L P; b erunt quoque L P, R X, æquales & parallelæ; c Ac proinde in circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem L P, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & R X, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST, T V, V X, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pẽtagoni FGHIK, rectæ R F, RG, SG, SH, T H, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis L R, æqualis ponitur semidiametro E F, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK, & est LF, latus decagoni; d erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: e Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR; quod angulus F L R, rectus sit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta F R, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademq;

a 6. vndecimi.
b 33. pri.
c 28. ter.
d 10. ter tijdecimi.
e 47. pri

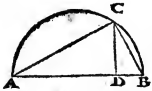


ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriusque pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia; cum eorum omnia latera æqualia sint lateribus pentagoni æquilateri. Post hæc, perpendicularis E Q, in vtramque partem extendatur, sintque rectæ QY, EZ, æquales singulæ lateri decagoni circuli FGHIK, vel RST VX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniã ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni, & QY, latus est decagoni eiusdem circuli; a erit quadratum lateris pentagoni X V, æquale quadratis rectarum QX, QY; b Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus X Q Y, rectus sit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque E Q, ad huius planum recta, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea que recta X Y, rectę XV, æqualis. Eodemque modo eidem X V, æqualis ostendetur V Y; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ R Y, S Y, T Y, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non diximus.) quatuor triangula R Y X, R Y S, S Y T, T Y V, æquilatera esse, & æqualia triangulo V Y X, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum G Z H, (cum E G, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula H Z I, I Z K, K Z F, F Z G, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, non duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturq; singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit

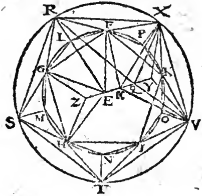
a 10. tertijdec.
b 47. pri.

ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphęra diametri A B.

DIVISA enim recta E Q, bifariam in α, ducantur rectæ α F, α X, α V. Quoniam igitur latera α Q, Q V, trianguli α Q V, æqualia sunt lateribus α Q, Q X, trianguli α Q X, cum Q V, Q X, sint semidiametri circuli R S T V X: Sunt autem & anguli α Q V, α Q X, æquales, nempe
a4.pri. recti, ex defin. 3. lib. 11. a Erunt & bases α V, α X, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α, Q, ad K, S, T, ostendentur rectæ α R, α S, α T, æquales & inter se, & ipsis α V, α X. Rursus quia latera α Q, Q X, trianguli α Q X, æqualia sunt lateribus α E, E F, trianguli α E F, cum Q X, E F, sint semidiametri circulorum æqualium, & E Q, diuisa sit bifariam in α: Sunt autem & anguli α Q X, α E F, æquales, nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11.



4.pri. Erunt quoque bases α X, α F, æquales: eodemque modo si ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, ostendentur α G, α H, α I, α K, æquales ipsi α X; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam vero Q E, semidiameter est, hoc est, latus hexagoni circuli F G H I K; & E Z, la-



c9.tertij dec. tus decagoni eiusdem circuli; c erit Q Z, diuisa in E, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit Q E.
d3.tertij dec. Quare minus segmentum Z E, assumens E α, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta α Z, d quintuplum potest

eius,quod ex Eα, describitur, quadrati: Potest autem & recta αF,quintuplum eiusdem quadrati rectæ Eα. (Nam cum quadratum rectæ EF,quadruplum sit quadrati rectę αE,ex scholio propos.4.lib.2.quod recta EF, dupla sit ipsius Eα;erunt quadrata rectarum EF,Eα, simul quintupla quadrati rectæ Eα. a Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα,æquale sit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ αF,quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum,αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ,αF,æquales erunt. Cum igitur ZY,bifariam secetur in α,(propterea quod si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ,QY,totæ Zα, Yα, æquales fiunt.) Erunt omnes rectæ ductæ ex α,ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrũ ZY,ex centro α,per omnes angulos Icosaedri constituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphæræ diametri AB. a47.pri.

b CVM enim sit vt α Z, ad αE, ita Y Z, dupla ipsius αZ,ad QE,duplam ipsius αE; c Ac propterea vt quadratũ rectæ αZ, ad quadratum rectæ αE, ita quadratum rectæ YZ,ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratum rectæ αZ,ostensum quintuplum quadrati rectæ αE:erit quoque quadratum rectę YZ,quintuplum quadrati rectę QE,hoc est,quadrati rectæ BC;quod recta QE, æqualis sit posita semidiametro EF,hoc est,rectæ B C: Est autem & eiusdẽ quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll.propos 8. lib.6. sit vt A B, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad B D, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC,ex coroll. propos.20. lib.6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius BD,erit etiam quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B C.) Quadrata igitur rectarum YZ,AB, æqualia sunt,ideoque & rectæ YZ,AB; Ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt. b15.qn c22.sex

QVONIAM denique diameter sphæræ A B,Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendũ est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem,quæ Minor vocatur.) poteslque quintuplum quadrati rectæBC, hoc

est,

eſt, rectæ illi æqualis E F ; erit quoque ſemidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis . (Nam quadrata rectarum AB, E F, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. a erunt commenſurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum ergo AB, ſit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc eſt, latus Icoſaedri, b Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icoſaedrum igitur conſtituimus, & ſphæra ſumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor. quod erat faciendum.

a 6. dec.

b 11. tertijdeci.

COROLLARIVM I.

EX dictis infertur, ſphæræ diametrum eſſe potentia quintuplam ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex quo ſcilicet Icoſaedrum conſtitutum eſt, & qui per quinque Icoſaedri angulos incedit. Oſtenſum enim eſt quadratum diametri AB, quintuplum eſſe quadrati rectæ BC, hoc eſt, ſemidiametri EF.

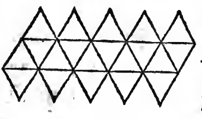
COROLLARIVM II.

ITEM manifeſtum eſt, ſphæræ diametrum eſſe compoſitam ex latere hexagoni, hoc eſt, ex ſemidiametro, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli : Nam YZ, diameter ſphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

COROLLARIVM III.

CONSTAT denique latera Icoſaedri oppoſita, qualia ſunt RX, HI, eſſe parallela . Nam recta R X, oſtenſa eſt parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectæ LP, ſit quoque parallela recta HI, vt in ſcholio propoſ. 27. lib. 3. demonſtrauimus; (eo quod æquales ſunt arcus H L, I P: continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perſpicuum eſt, rectas RX, HI, eſſe parallelas. Eademq; eſt ratio de cæteris lateribus oppoſitis.

SCHOLIVM.



QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icoſaedrum ſecundum totam ſoliditatem, ſi rite inter ſeſe aptentur.

DO-

PROBL. 5. PROPOS. 17. xvii.

DODECAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome,

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum ABCD, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt sit communis horum sectio recta AD, (Insistũt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipsi basi EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. a Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin EFGH.) Diuisis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis connectantur secantibus sese in O, P, centris quadratorum, vt constat ex demonstratione octaui problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX, æquales segmentis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, esse vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentagonum ATDVX, sit in vno plano, ita ostendetur. Cum RV, SX, sint ad quadratum ADEF, rectæ, b ipsæ erunt parallelæ; Ac proinde, cum sint æquales, (quia segmenta maiora PR, PS, quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cum & lineæ sectæ PL, PN, æquales sint. c (erunt quoque contin-

a 18. vndecimi.
b 6 vndecimi.
c 33. pri
d 33. pri

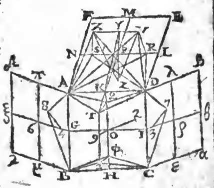
gentes

a 33. pri gentes rectæ RS, V X, æquales & parallelæ: a Eſt aute & A D, eidem R S, ſiue L N, parallela, eo quod A DL, parallelæ ſunt & æquales. b Igitur & AD, VX, para-
b 9. vndecimi. lelæ ſunt; c Ac propterea rectæ coniungentes AX, DV, eodem cum ipſis erunt plano; ideoque trapezium A
c 7. vndecimi. VX, in vno exiſtet plano: Eſt autem & triangulum AT in vno plano. Dico quod & in eodem plano cum trap zio ADVX. Ex P, namque ducatur PY, parallela ipſi R
d 8. vndecimi. d quæ erit recta ad quadratum ADEF, quod ad idem ꝛ cta ſit RV: Et connectantur rectæ KT, KY. Quoniam i tur eſt vt OK, ad OQ ita OQ, ad QK, ob ſectionem rec OK: Eſt autem kP, ipſi OK, æqualis; (ſunt enim dimid latera cubi;) & PY, ipſi OQ (cũ æqualis ſit ipſi RV, q poſita fuit æqualis ipſi OQ maiori ſegmento;) Erit qu que vt KP, ad PY, ita O Q, hoc eſt, QT, illis æqualis, QK. Quare cum triangula PKY, QTK, duo latera habea duobus lateribus proportionalia, ſintque ad vnum ang lum K, compoſita, e ita vt homologa latera ſint paralle
e 6. vndecimi. nempe PK, & QT, inter ſe, quod vtrumque rectum ſit quadratum ABCD; & PY, QK, inter ſe, quod vtrumque rectum ſit ad quadratum ADEF: f Erunt reliqua late
f 32. ſex KY, KT, in rectam lineam collocata; g Ac propterea
g 1. vndecimi. cta TY, in vno erit plano, ideoque planum ATD, & pl num ADVX, vnum planum conſtituent, per rectas T AD, ductum. Quocirca pentagonum A T D V X, in v exiſtit plano.

QVOD vero ſit æquilaterum, ita docebitur. Cu latera AN, N S, trianguli A N S, æqualia ſint lateri AK, KQ, trianguli AKQ; (Sunt enim AN, AK, dimidia latera cubi, & NS, KQ, ſegmenta minora rectarum æq lium ſectarum.) & anguli ANS, AKQ, recti; ſi ducat recta AQ, h erunt baſes AS, AQ, æquales. Rurſus cum
h 4. pri. latera A S, SX, trianguli A S X, ſint æqualia lateri AQ, QT, trianguli AQT: (Nam rectæ AS, AQ, oſte ſæ ſunt æquales, & S X, Q T, ſunt ſegmenta maiora ctarum æqualium ſectarum) & anguli ASX, AQT, rec ex defin. 3. lib. 11. i Erunt quoque baſes AX, A T, æqu
i 4. pri. es. Quod ſi ducatur recta D Q, oſtendemus eodem

argu-

argumento, rectam DT, rectæ AT; si vero ducatur recta DR, rectam DV, rectæ DT, esse æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV; æqualia: quibus etiam æquale ostendemus reliquum VX, hac ratione. [a] Quadrata rectarum PN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ SX: Est autem quadrato rectæ PN, æquale quadratum rectæ AN. Igitur & quadrata rectarum AN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ SX. [b] Cum ergo quadratis rectarum AN, NS, æquale sit quadratum rectæ AS; erit quoque quadratum rectæ AS, triplum quadrati rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarum AS, SX, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectæ SX. [c] Est autẽ quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratũ rectæ AX. Quadratum ergo rectæ AX, quadruplũ quoque erit quadrati rectæ SX, hoc est, quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ XY; [d] Sunt enim rectæ PS, XY, æquales. Cum igitur & quadratum rectæ VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ XY, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod VX, dupla sit ipsius XY; Erunt quadrata rectarum AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipsæ æquales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, ostensæ sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum ATDVX.



a 4. tertijdeci.
b 47. pri.
c 47. pri.
d 34. pri.

QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, secta sit in S, extrema ac media ratione, eique addita PR, æqualis maiori segmento PS; [e] erit quoque NR; secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit NP. [f] Quadrata igitur rectarum NR, RP, simul tripla sunt quadrati

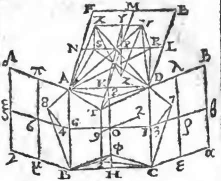
e 5. tertijdeci.
f 4. tertijdec.

rectæ NP, hoc est, quadrati rectæ AN: Est autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla
a 47. pri sunt eiusdem quadrati rectæ AN. a Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarum RV, AR, quadrupla sunt quadrati re-
b 47. pri ctæ AN. b Cum ergo quadratis rectarum AR, RV, æquale sit quadratum rectæ AV; Erit quoque quadratum rectæ AV, eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum. At vero eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum est quadratum rectæ AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod AD, dupla sit ipsius AN. Aequalia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD, ideoque & rectæ AV, AD, æquales. Simili argumēto, ductis rectis DS, DX, ostendemus DX, DA, æquales esse; ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia sunt lateribus DV, VX, trianguli DXV; & bases AD,
c 8 pri DX, æquales quoque: c Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX, æqualis angulo
d 7. ter. tydeci- AXV. Ac proinde, cum in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, d ipsum erit æquiangulum.

QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata CαβD, BγδA, recta ad quadratum ABCD, in communibus sectionibus CD, AB, quorum singula latera bifariam secentur in ε, θ, λ, I, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secentur deinde OH, OK, ρI, σG, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ 2, QT, 37, 48, æquales segmentis maioribus φO, QO, 3ρ, 46, coniunganturque rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonstrabimus eadem rōne, pentagona T2C7D, T2B8A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo cohærentia lateribus communibus

TD,

TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricetur alia nouem similia pétagona tangentia reliqua nouem cubi latera; constitutum erit Dodecaedrũ. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonstrabimus.



INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppositum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum A B C D, & eius oppositũ, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD; a Erunt & communes eorum sectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum Y P, recta sit ad planum ADEF, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodẽ pacto si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9OZ; erit ipsa, communis sectio planorum, quæ per rectas GI, HK, ducuntur. b Quia vero dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuo bifariam secant; secent se mutuo bifariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bifariam in centro sphæræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propos. 15. huius lib. Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta Z X. c Quoniam parallelæ sunt KP, OZ, quod vtraque recta sit ad planum ABCD; Item parallelæ sunt OK, ZP, quod vtraque recta sit ad planũ ADEF; erit PKOZ, (debent. n. duo puncta Z, intelligi esse coniũcta) parallelogrammũ, d ac propterea

a 19. vndecimi.

b 39. vndecimi.

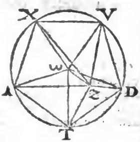
6. vndecimi.

PY,

PZ, æqualis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autem & PY, ipsi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. a Quare cum quadrata rectarum NR. PR, simul tripla sint quadrati rectæ NP, quod NR, in P, secta sit extrema & media ratione; erunt quoque quadrata rectarũ ZY, PY, hoc est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectæ PZ: (Est.n. XY, æqualis ipsi PS, hoc est, ipsi PY:) b Est aũt quadratis rectarũ ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratũ rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoque quadratum semidiametri sphæræ cubum comprehendentis: (c Nam vt diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; d Ac proinde vt quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratum semidiametri ad quadratum dimidij lateris. e Cum ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Aequale igitur est quadratum rectæ ZX, quadrato semidiametri sphæræ, seu cubi; Ac propterea ZX, æqualis semidiametro. Eadem ratione erit ducta recta ZV, semidiametro æqualis. Vel certe quia cum latera ZY, YX, trianguli ZYX, æqualia sint lateribus ZY, YV, trianguli ZYV, & anguli contenti recti. (Cum enim PY, sit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad sibi parallelam VX, perpendicularis.) f Erunt bases ZX, ZV, æquales: Sunt autem & ZA, ZD, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictum est. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphærę ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta ZT, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit ęquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ perpendicularis demittatur Zω, connectanturque rectę ωA, ωT, ωD, ωV, ωX. g Quoniã igitur quadratum rectæ ZA, æquale est quadratis rectarum Zω, ωA; & quadratum rectæ ZX, quadratis rectarum

Marginalia: a 4. terdec. — b 47. pri — c 15. quin — d 22. sex — e 15. terdec. — f 4. pri. — g 47. pri

ctarum. Zω, ωX: Sunt autem quadrata rectarum ZA, ZX, æqualia, quod rectæ ZA, ZX, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarum Zω, ωA, quadratis rectarum Zω, ωX, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Zω, æqualia relinquentur quadrata rectarum ωA, ωX, ideoq; rectæ



ipsæ ωA, ωX, æquales erunt. Non aliter ostendetur rectæ ωV, ωD, & inter se, & ipsis ωA, ωX, æquales, quod & rectę ZV, ZD, æquales sint ostensæ rectis ZA, ZX. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quam duæ,ª punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ωT, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarum Zω, ωA, æqualia erunt quadratis rectarũ Zω, ωT.ᵇ Cum ergo illis duobus æquale sit quadratũ rectæ ZA; his vero quadratũ rectæ ZT; Erunt æqualia quadratã rectarum ZA, ZT; proptereaq; & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare sphæra complectẽs cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri: Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, quã cubus. a 9.ter. b 47.pri

POSTREMO cum sit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN: ᶜ erit quoque vt NL, dupla ipsius NP, ad RS, duplam ipsius PS, ita RS, dupla ipsius PS, ad rectam compositam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit SR; Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius.) ᵈ Igitur maius segmentum SR, hoc est, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & prædictas figu- c 15.qu d 6.tertijdec.

ras;& demõstrauimus,quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea,quę vocatur Apotome. Quod erat faciẽdum.

COROLLARIVM I.

CVM ergo demonstratum sit;recta LN, extrema ac media ratione secta,maius segmentum esse rectam RS:Sit autem LN, ęqualis lateri cubi, & RS,lateri Dodecaedri;Perspicuũ est,si latus cubi secetur extrema ac media ratione,maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pẽtagoni Dodecaedri eadem sphæra cõprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis AV,DX, subtendentibus angulos X,& V, eiusdem pentagoni.

QVONIAM vero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, a facit maius segmentum latus pentagoni:b ac propterea recta cõposita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni,hoc est,ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est,ex latere Dodecaedri,similiter diuiditur,facitque minus segmentum latus dodecaedri,& maius segmẽtum latus cubi:Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri,maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphæræ.

a 8. tertijdec.
b 5. tertijdec.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis,in Dodecaedro esse sex latera,quorũ bina opposita sunt parallela,bifariamque secantur,& ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque,& ad angulos rectos secantibus.Nam duo ex dictis lateribus sunt VX,T2,quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi EF, AB:aliaq; quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum,quæ super bases cubi oppositas existunt,parallela sunt, cũ parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis,secanturque,ex demonstratis,bifariam & ad rectos angulos,a lineis rectis,quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ YZ, 9Z,&c.quæ vt demonstratum est, se mutuo inter secant in centro Z. Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos; bifariam quidem,quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales sint dimidio lateri cubi; & YP,9O,æquales maioribus segmentis æqualibus PS,OQ:Erunt totę YZ,9Z,æquales:Eademque ratione reliquæ lineæ ex Z,ad sectiones oppositorum laterũ ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ

æquales

æquales sunt, seque bifariam in centro Z, mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo kOZP, angulus OZP, rectus est, cum opponatur recto OkP. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cum enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ: erit ZY, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit PZ, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY: a ideoque vt dupla ipsius ZY, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipsius ZP, nimirum ad latus cubi; ita eadem duplā ipsius ZP, ad duplā ipsius PY, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ. a 15. q.

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrum secūdum totam soliditatem, si rite inter se complicentur.

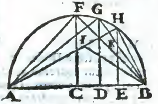


PROBL. 6. PROPOS. 18. xviij.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæræ diameter AB, quæ in C, secetur bifariam; In D, vero ita, vt BD, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, vt BE, sit quinta pars eiusdem. Descripto dein-

de circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsi AB, perpendiculares C F, DG, EH; connectanturque rectæ AF, B F, A G, B G, AH, BH. Post



hæc ex H A, abscindatur H I, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH, connectaturque recta B I. Postremo B G, secetur extrema ac media ratione in K, sitque maius segmentum BK.

QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico A G, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; A F, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icosaedri; BK, denique latus Dodecaedri. Quoniam enim AG, media proportionalis est inter BA, AD. ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propos. 20. eiusdem lib. vt B A, ad AD, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AG: Est aũt BA, ipsius AD, sesquialtera: cum talium partiũ 2. sit AD, qualium 3. est BA. Igitur & quadratum rectæ BA, sesquialterum est quadrati rectæ AG; a Ac proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri; erit AG, latus Tetraedri.

a 13. tertijdec.

RVRSVS quoniam A F, est media proportionalis inter BA, AC, ex eodem coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ AF, ex adducto coroll. propos. 20 lib. 6. Est autem BA, ipsius AC, dupla: Erit quadratum rectæ BA, duplum quadrati rectæ AF. b Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri.

b 14. tertijdec.

DEINDE cum B G, sit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B G, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipsius B D, tripla, ex constructione: Erit quadratum rectæ AB, triplum quadrati rectæ B G. c Quocirca cum sphæræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi.

c 15. tertijdec.

PRAETEREA quia, ex eisdem corollariis, BH, est media proportionalis inter AB, BE; atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH: Est autem, ex constructione AB, ipsius BE, quintupla: Erit quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BH. Cum igitur diameter sphæræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis ex coroll. 1. propos. 16. huius lib. Erit BH, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli; Est autem HI, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione.[a] Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, simul; Ac proinde [b] cum quadratum rectæ BI, æquale sit quadratis rectarum BH, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiusdem.[c] Quam ob rem BI, latus est Icosaedri.

a 10. tertij dec.

b 47. pri

c 16. tertij deci-

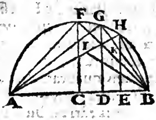
DENIQVE cum BG, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit BK, maius segmentum latus Dodecaedri in eadẽ sphæra descripti, ex coroll. 1. propos. 17. huius lib. Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphæra descriptarum.

QVOD vero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit diametrum sphæræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perspicuum est, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse quadratum lateris Tetraedri; talium vero 3. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi talium 2.

Diamet.	*6.*
Tetraed.	4.
Octaed.	3.
Cub.	2.

Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertium lateris Octaedri, potentia vero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi Quapropter quadrata ex lateribus harũ trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi nec non ex spæræ diametro descripta, proportionem inter se habent, quam numerus ad numerum,[d] Ac propterea diameter sphæræ, & latera dictarum figurarum lineæ sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter sphæræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta late

d 6. dec.



ra Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt
29.dec. constat ex coroll. propos. 24. lib. 8.a Erunt huiusmodi lineæ, nimirum diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incõmensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

AT vero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demonstratum est, nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prędictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum sint diametro sphæræ commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum: ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.

SED neque inter se vllo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, b erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, c erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commmensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo.d quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112 lib. 10. Apotome, & Minor sunt lineæ Irrationales prorsus inter se differentes, ita vt neutra sit eadem alteri.

b104.dec. c106.dec. d16.et 19.dec.

ITAQVE quamuis ex lateribus expositis quinque figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro sphęræ, ideoque Rationalia existant, duo vero posteriora incommensurabilia,

& inter se, & diametro; reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ forte causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim A G, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex scholio propos. 28. lib. 3.

EODEM modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quam BG, cubi latus.

LATVS autem cubi B G, maius esse latere Icosaedri B I, hac arte demonstrabimus. Quoniam A B, tripla ponitur ipsius B D; a & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectę BD, cum noncupla proportio sit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectę AB, talium 1. erit quadratum rectæ B D. Qualium autem partium 9. est quadratum rectæ A B; talium 3. est quadratum rectæ B G; b quod illud huius triplum sit; Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum G D, B D, cum æqualia sint quadrato rectæ B G. Igitur si auferatur quadratum rectæ B D, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ G D. Quoniam vero quadratum rectæ A B, quintuplum est quadrati rectæ B H, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintup la, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; c erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplã, minor quã 2. Quare quadratũ rectęGD, maius est quadrato rectę BH, ideoq; recta GD, maior quã recta BH. Rursus quia diameter sphęrę AB, componitu

a 20. sex

b 15. tertij dec.

c 10. qu

ex BH, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiusdem circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. constat latus decagoni HI, maius esse tertia parte rectę AB, hoc est, minus recta B D. Nam si HI, recta æqualis credatur tertię parti rectæ A B; erit dupla illius, æqualis duabus tertijs partibus, nempe ipsi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirũ ipsi BD; Atque adeo cũ quadratum rectę A B, noncuplum sit ostensum quadrati rectæ B D, erit idem quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod est absurdum. quintuplum enim est demõstratum. Nõ ergo HI, tertia pars est ipsius AB. Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI, dicatur maior tertia parte rectæ AB, & proinde dupla ipsius H I, maior quam duæ tertiæ, hoc est, quam AD, erit BH, minor quam tertia pars BD. Quare quadratum rectæ A B, maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ BH. Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI, tertia parte ipsius A B: Sed neque æqualis tertiæ parti, vt ostendimus. Minor ergo est quam tertia pars, hoc est, quam B D. Itaque cum rectæ GD, DB, maiores sint rectis B H, HI, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: a Est autem quadratum rectę B G, æquale quadratis
a47. pri rectarum GD, DB; & quadratum rectæ BI, quadratis rectarum BH, HI. Quadratum ergo rectæ B G, maius quoque erit quadrato rectæ B I; Ac proinde recta B G, nempe latus cubi, maior erit quam recta BI, latus scilicet Icosaedri.

MAIVS denique esse latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri B K, hac ratione patefiet. Cum rectæ B G, diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit B K, & minus G K; erit rectangulum sub B G, B K, maius rectangulo sub B G, GK; atque adeo rectangula sub B G, BK, & sub B G, G K, simul maiora duplo rectanguli sub BG, GK: b Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub B G,
b2. secũ GK; æquale quadratum rectæ B G; Et duobus rectangulis sub B G, G K, æqualia sunt duo quadrata rectæ B K,
c17. sex (Nam cum sit, vt B G, ad BK, ita B K, ad G K; c erit qua-

dratum

dratum rectæ BK, æquale rectangulo ſub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ B K, æqualia duobus rectangulis ſub BG, GK.) Maius igitur quoque eſt quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ B K; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ B G, ſex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia ſunt quinque quadrata rectæ B H. (Cum enim quadratum rectæ A B, triplum ſit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectę BH; erunt tam tria quadrata rectę BG, quam quinque quadrata rectę BH, ęqualia eidem quadrato rectę AB, ideoque tria illa his quinque ęqualia.) Igitur & quinque quadrata rectę B H, maiora erunt ſex quadratis rectę B K; Ac proinde vnum quadratum rectę B H, maius erit uno quadrato rectæ B K. (Si namque ęquale eſſet quadratum rectę BH, quadrato rectæ BK, vel minus; forent quinque quadrata rectæ B H, minora ſex quadratis rectæ BK. quod eſt abſurdum, cum illa quinque hiſce ſex maiora ſint demonſtrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quam recta BK; Ac propterea cum BI, maior ſit quam BH, multo maior erit BI, latus uidelicet Icoſaedri, quam BK, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figuratum expoſuimus, & inter ſe comparauimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonſtrant, prater dictas quinque figuras, non poſſe aliam conſtitui figuram ſolidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur inter ſe æqualibus, hac fere ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, ſolidus angulus conſtitui non poteſt, cum ſaltem tres anguli plani requirantur ad ſolidi anguli conſtitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, conſtat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus;

EX quinque, angulus Icoſaedri;

EX ſex autem huiuſmodi triangulis ad idem punctum

coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus cōtineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertiæ partes vnius recti, hoc est, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. a Nam solidus omnis angulus minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

a 20. vndecimi.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quam quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus cōponitur. Cum enim quinque anguli pētagoni æquales sint sex rectis, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoq; ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cū enim vnus, vt dictum est, maior sit recto, eo quod continet vnum rectum, & insuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quam quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sane ex aliis figuris æquilateris, & æquiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cum sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, vt ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum; ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea duas partes sextas vnius recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atque idcirco multo minus ex pluribus eiusmodi angulis, quam tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt

quatuor

quatuor rectis. Quam ob rē perspicuū est, præter dictas quinque figuras, aliā figurā solidā non posse constitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

NAM si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

SI vero quatuor eiusmodi triangula conueniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

SI denique assumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum solidum, conficietur Icosaedrum viginti triangulis eiusmodi contentum.

QVOD si tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

POSTREMO, si tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis latera, vt habeantur omnium basium latera: Quia vero bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerū laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autē octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerū laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidiū est rur-

sus

ſus 12. numerus laterum Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium eſt 30. numerus laterum Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum conſtituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium eſt rurſus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD ſi quis rurſus interrogauerit, quotnam angulos ſolidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in vnius baſis angulos, vt habeantur omnium baſium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque ſemper anguli baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius anguli ſolidi, diuidendi ſunt omnes anguli in numerum angulorum, qui ſimul coeunt ad angulum ſolidum conſtituendum, vt numerus angulorum ſolidorum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui ſi diuidantur in 3. (Tot enim anguli conſtituunt vnum ſolidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos ſolidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnũ angulum ſolidum cubi) faciunt 8. angulos ſolidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 4. (Tot enim anguli componunt ſolidum angulũ Octaedri.) conficiunt 6. angulos ſolidos Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli. qui diuiſi in 5. (Tot enim anguli conſtituunt angulum ſolidum Icoſaedri) producunt 12. angulos ſolidos Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorũ vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad conſtituendum angulum ſolidum Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos ſolidos Dodecaedri.

DENIQVE conſideratione etiam dignum eſt, cubum & Octaedrum reciproca eſſe, quod ad baſes attinet, & ad an-

gulos

gulos solidos. Nam quot bases in uno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet sex bases, & octo angulos solidos: octaedrum vero octo continet bases, & sex angulos solidos. Sic etiam reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti bases, & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrũ duodecim bases possidet, & viginti angulos solidos. Solum Tetraedrum, (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cum seipso. Habet enim quatuor bases, totidemq; solidos angulos.

FINIS ELEMENTI TERTIIDECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM.

Et Solidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur : vt alij vero, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES *Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique nostro ob disciplinæ societatem commendatus longissimo peregrinationis tempore cum eo versatus est. Cumque differerent aliquando de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icosaedri eidem sphæræ inscri-*

ptorum,

ptorum, quam hæc inter se habeant rationem, censuerunt ea nō recte tradidisse Apollonium; quæ a se emendata, ut pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonstrationem accurate complectebatur de re proposita, ex eiusque problematis indagatione magnā equidem cepi voluptatem. Illud certe ab omnibus perspici potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus. Quod autē diligenti, quantum conijcere licet, studio nos postea scripsisse videmur, id monimentis consignatum tibi dedicandum duximus; ut qui feliciter cum in omnibus disciplinis, tum vel maxime in Geometria versatus; scite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaque nos complecteris beneuolentiā, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, ut prooemio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi ascribuntur: Duo vero subsequentes a plerisque Hypsicli Alexandrino & recte, meo iudicio, tribui solent; in quorum quidem priori inter se comparantur Icosaedrum, & Dodecaedrum, tam secundum superficies, quam soliditates: In posteriori vero exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium unius intra aliam; ut hi duo libri sint instar appendicis cuiusdam elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non iniucunda, quæ spectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inscriptiones unius in alio: quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus absolui-

tur. Visum est, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in vniuersum differere, proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuo inscribuntur. Quæ in re maximo nobis adiumẽto fuisse Campanũ, & Franciscũ Flussatẽ Candallã, qui diligẽtẽ operã, & sedulã in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non solum insequentes duos libros quamplurimis theorematibus problematibusque locupletauit; verumetiam integrũ librum, qui ordine decimussextus est, adiunxit, in quo proprietates illustres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuisse Hypsiclis institutum in hoc lib. 14. disputare de comparatione mutua Icosaedri et dodecaedri. facile intelligi potest ex eius proœmio ad Protarchum, quod superius est positum.

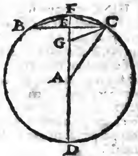
QVONIAM vero in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quam in earundem ordine, & inter se, & a Francisco Flussate, ideoque & a nobis discrepant; annotauimus in margine ordinẽ vtriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis inferior vero Campani seriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantum numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem, significatur; Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVAE ex centro circuli cuiſpiam in pẽtagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

EX

EX centro A, circuli B C D, ducatur AE, perpendicularis ad B C, latus pentagoni in dicto circulo descripti. Dico AE, dimidium esse lineæ compositæ ex latere hexagoni & decagoni eiusdem circuli. Extensa enim AE, in vtramque partem, vt perficiatur tota diameter DF, sumptaque EG, æquali ipsi EF; connectantur rectæ AC, C G, CF, BF. a Quoniam igitur perpendicularis A E, secat rectam B C, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli B E F, æqualia lateribus CE, EF, trianguli C E F; Cum igitur & anguli contenti sint æquales, nempe recti; b erunt bases CF, BF, æquales; c ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde existente arcu B C, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiusdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rursus quia latera CE, EF, trianguli C EF, æqualia sunt lateribus C E, E G, trianguli C E G, suntque anguli contenti recti; d erint & bases C F, CG, & anguli C F G, C G F, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars est semicircumferentiæ DCF, cum sit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualium 4. est arcus D C hoc est, arcus D C, quadruplus erit arcus C F. e Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli C A F: f Est autem angulus C F D, dimidium anguli D A C, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem sit basis D C. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis ostensus CG F, duplus erit anguli C A F: g Atqui angulus CG F, externus, æqualis est internis G A C, G C A, in triangulo G A C. Cum igitur G A C, sit dimidium anguli CGF, vt ostensum est, erit GCA, reliquum dimidium eiusdem anguli C G F, ideoque æquales erunt anguli GAC, GCA; h ac proinde & latera AG, CG, æqualia. Est autem CG, recta ostensa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FG, simul: Ac



a 3. ter.
b 4. pri.
c 28. ter.
d 4. pri.
e 33. sex.
f 20. ter.
g 32. pri.
h 6. pri.

proinde tres simul A E, EF, FC, hoc est, duæ simul A F, FC, duplæ erunt ipsius AE, atque idcirco e contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum simul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

EX his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quē dicta hæc linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam AE, quæ ex centro perpendicularis est ad B C, diuidere arcum BC, bifariam in F.

COROLLARIVM II.

HINC quoque fit, perpendicularē ex centro ad latus pentagoni ductā̄ æqualem esse vtrique lineæ simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam enim vt in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul: Est autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. æqualis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni; perspicuum est eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

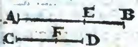
iiij. ij.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur; ipsæ similiter secabūtur, in easdem scilicet proportiones.

SECENTVR binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse vt AB, ad CD, ita A E, ad C F, & EB, ad FD; Item vt AE, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cum enim sit, vt AB, ad AE, ita AE, ad EB; & vt CD, ad CF,

a17. sex



ita CF, ad FD; a erit rectangulum sub AB, E B, æquale quadrato rectæ AE; & rectangulum sub C D, F D, æquale quadrato rectæ

CF. Quam ob rem erit vt rectangulum ſub A B, E B, ad quadratum rectæ AE, ita rectangulum ſub CD, F D, ad quadratum rectæ C F, (eſt enim vtrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt quadruplum rectanguli ſub AB, EB, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli ſub C D, F D, ad quadratum rectæ C F: & componendo, vt quadruplum rectanguli ſub AB, EB, & quadratum rectæ AE, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli ſub CD, FD, & quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ CF: a Sed quod quater continetur ſub AB, EB, vna cum quadrato rectæ A E, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex A B, E B; Et quod quater continetur ſub CD, FD, vna cum quadrato rectæ CF, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex C D, FD. Igitur erit quoque vt quadratum lineæ compoſitæ ex AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadratum lineæ compoſitæ ex C D, F D, ad quadratum rectæ CF, b Ac proinde, vt recta compoſita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta compoſita ex CD, FD, ad rectam C F: Et componendo vt compoſita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc eſt, dupla ipſius AB, ad rectam AE, ita recta compoſita ex CD, FD, & recta CF, id eſt, dupla ipſius CD, ad rectam CF; Et permutando, vt dupla ipſius AB, ad duplam ipſius CD, ita A E, ad C F; c Vt autem dupla ipſius AB, ad duplam ipſius CD, ita eſt AB, ad CD. Erit ergo vt AB, ad CD, ita A E, ad C F; Ac propterea, cum ſit vt tota AB, ad totam CD, ita A E, ablata ad CF, ablatam; d erit quoque reliqua E B, ad reliquam F D, vt tota ad totam. Quare vt AE, ad C F, ita erit E B, ad FD, cum vtraque proportio eadem ſit proportioni AB, ad CD: Et permutando, erit vt AE, ad EB, ſic C F, ad F D, & ſic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, oſtendemus & totas lineas, & earundem partes eſſe proportionales inter ſe. Si binæ itaque rectæ tineæ extrema ac media ratione ſecentur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 8. ſecū

b 2. ſet

c 15. qn

d 19. qn

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonſtrabimus hoc ſequēs theorema

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorũ eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

a 9.tertijdec. b 8.tertij dec. c 2.quartidec.

QVONIAM enim a *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam;* b *& recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni:* c *fit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad maius, quæ maioris segmenti rectæ angulũ pentagoni subtendentis ad minus. Cum ergo sit, vt maius segmentum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoq; latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.*

EX hac quoque propositione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodẽ cẽtro ad latus triãguli ęquilateri ductæ, minus vero ęquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis AD, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum A E, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ductæ; minus vero segmentum ED, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdẽ circuli. Extẽsa nãq; recta AD, ad F, & connexa recta FC, erit FC, latus

deca-



decagoni, cum ex coroll. 1. propos. 1. huius lib. arcus BC, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F, a Ac proinde recta composita ex AF, latere hexagoni, & FC, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AF, latus hexagoni, minus vero segmentum FC, latus decagoni. Quare vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota AD, diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex AF, FC, similiter diuisam, ita AE, maius segmentum ad AF, maius segmentum; & ED, minus segmentum ad FC, minus segmentum: b Est autem tota AD, dimidium totius compositæ ex AF, FC. Igitur & AE, ipsius AF, semidiametri, & ED, ipsius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo per corollariũ propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri; perspicuum est, maius segmentum AE, æquale esse dictæ perpendiculari, minus vero ED, dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.

a 9. tertij dec.

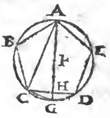
b 1. quartidec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

ij. iiij.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, subtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarum CD, AC, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2.



propof. 10. lib. 13. diuidat & arcũ CD, & latus CD, bifariã in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circũferẽtiæ, ideoque recta ſubtenſa CG, latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla eſt rectę FG; erit ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ AG,

a 47. pri

quadruplum quadrati rectæ FG: a Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla ſunt quadrati rectæ FG; Atque adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati eiuſdem rectæ FG: b. Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale ſit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum ſemidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum deſcribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum.

b 10. tertijdec.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiuſmodi.

SI in ſphæra eadem cubus, & dodecaedrũ inſcribantur, quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam ſphæra deſcripti: eritque ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. recta AC, ſubtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. c Perſpicuum eſt autem quadrata rectarum AC, CD, lateris ſcilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla eſſe quadrati ſemidiametri FG, &c.

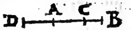
c 3. quartidecimi.

SI

THEOR. 4. PROPOS. 4. o. iij.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmentum AC. Dico AC, esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit .n. AD, latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum ipsi AB; a eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum B A: Ponitur autem & A B, secta in C, similiter. b Igitur erit vt B D, tota ad maius sui segmentum A B, ita A B, tota ad maius sui segmentum AC: Sed est quoque vt B D, tota ad maius sui segmentum AB, ita AB, maius segmentum ad AD, segmentum minus, per definitionem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est AB; erit & AC, eiusdem circuli latus decagoni.



a 29. tertijdec.

b 2. quartidecimi.

ALITER. Adiungatur ipsi A B, in rectum recta A D, æqualis maiori segmento A C; c eritque tota recta B D, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur A B, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 9. lib. 13. AD, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & A C, æqualis ipsi A D, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum.

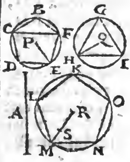
c 5. tertijdec.

ij. v.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icosaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundem circulum circumscribere & pentagonum B C D E F, & triangulum GHI, hoc est, circulos BCDEF, GHI, ipsa circumscribentes esse æquales. Circumscribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, [a] ex quo Icosaedrum sphæræ inscribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni sint latera Icosaedri, ideoque quodlibet ipsorum æquale cuiuis lateri trianguli G H I. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ P E, Q H, R M; Seceturque RM, extrema ac media ratione in S; [b] eritque maius segmentum R S, latus Decagoni in circulo KLMNO, in quo R M, est latus hexagoni. Subtendat quoque recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quę erit per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propos. B F, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris cubi C F, secti extrema ac media ratione; [c] erit vt tota C F, ad totam R M, ita B F, maius segmentum ad R S, maius segmentum; [d] Ac propterea vt quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ R M, ita quadratũ rectæ BF, ad quadratum rectæ R S; Atque adeo, per ea, quæ demonstrata sunt in scholio propos. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Est autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectę RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi C F, ex propos. 15. lib.



a 13. tertydec.

b 4. quartidecimi.

c 2. quartidecimi.

d 22. sex.

13. quam quintuplum quadrati semidiametri RM, ex coroll. 1. propos. 16 lib. 13. æquale est quadrato ex A, diametro sphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: a Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt tribus quadratis rectæ CF, (cum hæc ostensa sint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed quoniam, (b cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; c sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea vnum quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH, & idcirco semidiameter PE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 10. tertijdec.

b 3. quartidecimi.

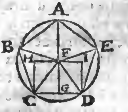
c 12. tertijdec.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

iij. vi.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pētagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari compre-

henditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale:



EX centro F, circuli circumscribentis pẽtagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis.n.rectis ex F, ad oẽs angulos pentagoni, resoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. cum bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum sub HC, hoc est,
a41.pri sub FG, & CD. a Quoniam vero rectangulum CI, duplũ est trianguli FCD, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, æqualium; erit rectangulum CI, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cũ quinque triangula æqualia sint vni pentagono; Atque adeo sextuplum rectanguli CI, quinquies sumpti, nimirũ rectangulum CI, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorum pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

b41.pri ALITER. Facta eadem figuræ constructione, b cum rectangulum CI, duplum sit trianguli FCD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulum CI, trigesies sumptum æquale triangulo FCD, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cum enim vnum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabũt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Atque idcirco trian-

gulum FCD, sumptum sexagesies æquale erit superficiei Dodecaedri.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

iii. vii.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

EX centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentũ sub DE, & B C, trigesies sumptum, æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, resoluetur triangulũ in tria triãgula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & basis vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritque rectangulum B G, contentum sub F B, hoc est, sub DE, & BC. a Quoniam vero rectangulum BG, duplum est trianguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorũ duorum triangulorum ipsi DBC, æqualium: Erit rectangulum B G, ter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cum tria talia triangula æqualia sint vni triangulo Icosaedri; Atque adeo idem rectangulum trigesies sumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter sumpti, æquale erit viginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.



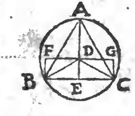
a 41. pri

ALI-

a 41.pri ALITER. Facta eadem constructione figuræ,[a] cum rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum B G, trigesies sumptum, æquale triangulo DBC, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta huiusmodi triangula conficiunt viginti triangula Icosaedri, eo quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIVM.

ITAQVE superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambę figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex cẽtro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus.[b] Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto;[c] Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri.[d] Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiẽ Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.



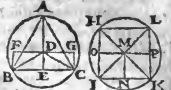
b 6. quartidecimi.
c 7. quartidecimi.
d 15. qu.

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regulariũ, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri ABC, circumscriptum a circulo, cu-

ius

ius centrum D, a quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum BG, sexies sumptũ, æquale esse superficiei Tetraedri.



a Quoniam enim rectangulum BG, duplum est trianguli DBC, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipsi ABC, æqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum BG, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis æquale. a 41. pri

SIT deinde idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies sumptum, æquale esse superficiei Octaedri. b Cum enim rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptum æquale vigintiquatuor huiusmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, duodecies sumptum æquale est superficiei Octaedri. b 41. pri

SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta MN, perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur OP, ipsi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum sub OI, hoc est, sub MN, & IK, sumptum duodecies, æquale esse superficiei cubi. c Quoniã enim rectangulum IP, duplum est trianguli MIK, hoc est, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum æquale vigintiquatuor eiusmodi triangulis. Quare cum vigintiquatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum IP, duodecies sumptum æquale superficiei cubi. Quod est propositum. c 41. pri

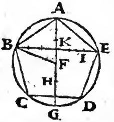
ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL; (sunt enim IP,PH,aequalia,cum recta O I, sit dimidium lateris HI,nempe aequalis ipsi MN) constituent duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi,hoc est, totam superficiem cubi.

iiij. viii.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineae subtẽdentis angulum pentagoni aequilateri in eodem circulo descripti; aequale est dicto pentagono.

IN circulo,cuius centrum F, describatur pentagonũ aequilaterum ABCDE,& ducta diameter A G, diuidatur in quatuor aequales partes,quarum tres sint AH: Angulũ vero A,subtendens recta BE, secetur in sex partes aequales,quarum quinque sint BI,& vna IE,ita vt BI,sint quintupla ipsius IE. Dico rectangulum cõprehensum sub AH, BI, aequale esse pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF;quoniam AH, cõtinet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum sit semidiameter; erit A H, ipsius A F, sesquialtera. Quia vero recta FA,diuidens arcum B A E, bifariam, diuidit



quaque rectam BE,bifariam,per coroll. 1. propos. 10. lib. 13. in puncto K;continebit tam KB, quàm KE, tres sextas rectae BE;atque adeo cum BI,contineat quinque,continebit KI,duas:Ac proinde & KB,ipsius KI, erit sesquialtera. Quamobrem erit vt AH,ad AF, ita KB, ad KI; a atque idcirco rectangulum sub extremis AH,KI,aequale erit rectangulo sub medijs AF,KB. b Est autem rectangulum sub AF,KB,duplum trianguli A B F,cum rectangulum & triangulum eandem habeant basin A F, & eandem altitudinem BK,hoc est, inter easdem sint parallelas constituta.

a 16. sex
b 41. pri

tuta.

:uta. Igitur & rectangulum sub AH, KI, duplum erit eiusdem trianguli ABF: a Est autem & rectangulum sub AH, KI, duplum rectanguli sub AH, IE; propterea quod & basis KI, dupla est basis IE, (continet enim KI, duas sextas partes ipsius BE, & IE, vnam.) eademque semper altitudo AH. Igitur æqualia sunt triangulum ABF, & rectangulum sub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentaganum ABCDE, quintuplũ est trianguli ABF, quod pentagonum in quinque huiusmodi triãgula resoluatur, ductis rectis e centro F, vt propos. 6. huius lib. docuimus. b Rectangulum vero sub AH, BI, quintuplum est rectanguli sub AH, IE; quod & basis BI, quintupla sit basis IE, eademque semper altitudo AH. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum sub AH, BI, æqualia sunt. Rectangulum ergo contentum sub tribus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 1. sex.

b 1. sex.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero, si pentagonum ABCDE, statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphæra descripti, BE, est latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icosaedri in eadem sphæra constituti, (c comprehensi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propos. 12. lib. 13. secet semidiametrũ FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem semidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, nempe sub AH, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub BI, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti.

c 5. quartidecimi.

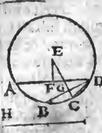
THEOR. 9. PROPOS. 9.

iiii. viii.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

IN circulo ABCD, d circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triãgulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD, & triãguli AD; & ex cẽtro E, ducãtur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit denique H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico es

d 5. quartidecimi.



se, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim lateris cubi H, secti extrema ac media ratione, maius segmentum est B D, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem E G, sectæ quoque extrema ac media ratione maius segmentum est EF, ex scholio propos. 2. huius lib. a Erit vt H, tota ad BD, maius sui segmentum, ita EG, tota ad EF, maius sui segmentum; b Ac proinde rectangulum sub extremis H, EF; æquale erit rectangulo sub mediis B D, E G. c Quia vero est, vt H, ad AD, ita rectangulum sub H, EF, ad rectangulum sub AD, EF, cum bases sint H, AD, altitudo vero semper eadem EF; Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum sub BD, EG, (quod est æquale rectangulo sub H, EF,) ad idem rectangulum sub AD, E F. Quare cum ex coroll. propos. 7. huius lib. sit, vt rectangulum sub BD, EG, ad rectangulum sub AD, EF, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; Erit quoque, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, &c. Quod ostendendum erat.

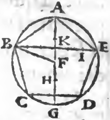
a 2. quartidecimi.
b 16. sex.
c 1. sex.

ALITER. d Circumscribat pentagonum Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icosaedri AFG, circulus idē, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta AI, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. cuius quinque sextæ partes sint B K. Dico rursus esse, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiē Icosaedri. Quoniam enim rectangulum sub AI, BK, æquale est pentagono A B C D E, ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectangulum sub AI, IF, æquale est triangulo A F G, ex scholio propos. 41. lib. 1.

d 5. quartidecimi.



cum F G, basis trianguli dupla sit ipsius IF, basis rectãguli: erit vt rectangulum sub AI, B K, ad rectangulum sub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum A F G: a Est autem vt rectãgulũ sub AI, BK, ad rectãgulũ sub AI, IF, ita BK, ad I F, cũ bases sint BK, IF, & altitudo eadẽ sẽper AI. Erit igitur quoque vt pentagonũ ABCDE, ad triangulũ AFG, ita BK, ad IF; Ac proinde, (si primum, & tertium, nimirum pentagonum ABCDE, & recta B K, æque multiplicentur per numerum 12. Item secundum, & quartum, nempe triangulũ AFG, & recta IF, ęque multiplicentur per numerum 20. b erit quoque vt pentagonum A B C DE, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigesies sumptum, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta B K, duodecies sumpta ad rectam I F, vigesies sumptam. Atqui recta B K, duodecies sumpta æquiualet lateri cubi B E, decies sumpto; (Nam cũ BK, contineat quinque sextas partes ipsius BE, continebit eadem BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE.) Recta vero IF, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri FG, decies sumpto; (eo quod FG, est ipsius IF, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi BE, decies sumptum ad latus Icosaedri FG, decies sumptum; Ac propterea, c cum eandem proportionem habeãt decem latera cubi ad decem latera Icosaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icosaedri; perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.



a 1. ex.

b schol. 22. q.

c 15. q.

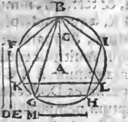
THEOR. 10. PROPOS. 10.

iiij. ix.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à to-

ta,& id quod à maiori ſegmento, ad rectam potentem id,quod à tota,& id,quod à minori ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione,ſitque maius ſegmentum A C. Sit quoque D, latus cubi,& E,latus Icoſaedri in ſphæra eadem cum cubo deſcripti. Ex A, centro, ad interuallum AB,circulus deſcribatur, in quo conſtituatur & pentagonum æquilaterum B F G H I, & triangulum æquilaterum B K L. Si igitur BF,ponatur latus Dodecaedri alicuius ſphæræ, erit ducta recta B G, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Quoniam vero A C, maius ſegmentum ſemidiametri AB,ſectæ extrema ac media ratione,a eſt latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum A B, latus eſt Hexagoni;b poterit BF,latus pentagoni & totam AB, latus videlicet hexagoni,& maius ſegmentum A C, latus ſcilicet Decagoni in eodem circulo. Poſſit iam & recta M,totam AB,& minus ſegmẽtum BC,per ea,quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Dico ſic eſſe D,latus propoſitum cubi ad E,latus propoſitum Icoſaedri,vt eſt BF,potens totam AB,& maius ſegmentum AC,ad M,potentem totam AB, & minus ſegmentum B C. c Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri B K, triplum eſt quadrati ſemidiametri A B; d Item quadrata rectarum AB,BC,tripla ſunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ BK,ad quadratum rectæ AB,ita quadrata rectarum A B, B C, hoc eſt, quadratum rectæ M, ipſis æquale, ad quadratum rectæ A C. Vtrobique enim proportio eſt tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB,ad quadratum rectæ AC: Eſt autem vt quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ



a 4. quartidecimi.
a 10. tertijdec.
c 12. tertijdec.
d 4. tertijdec.

G, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectę B G, sectæ xtrema ac media ratione, maius segmentum sit BF, ex co oll. 1. propos. 17. lib. 13. eo qd' BG, est latus cubi, & BF, la us Dodedecaędri eiusdem sphæræ; a Erit vt tota A B, ad naius segmentum A C, ita tota BG, ad maius segmentum F, b Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum ectę AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ F.) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ B G, ad quaratum rectæ BF, ita quadratū rectæ BK, ad quadratū reæ M: Et permutādo, vt quadratū rectæ BG, ad quadratū ectæ BK, ita quadratum rectæ B F, ad quadtatum rectæ I; c Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad retam M, potentem totam A B, & minus segmentum B C. um igitur proposita latera D, E, cubi & Icosaedri, eandē abeant proportionem, quam rectæ BG, BK, vt mox osten emus; perspicuum est, vt se habet recta BF, potens totam B, & maius segmentum A C, ad rectam M, potentem otam AB, & minus segmentum B C, ita se habere proositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si ecta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

a 2. quartidecimi.
b 22. sex
c 22. sex

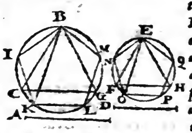
SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, iusdem sphæra eandem habeant proportionem, quam recta G, BK, demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia phera descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem phæra. Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis lia sphæra. Dico esse vt A, ad BC, ita D, ad E F. Perfectis amque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, & cira ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis entagona æquilatera B I K L M, E N O P Q, connectan-

a 5. quartidecimi.



turque rectæ BK, CK, EO, FO. a Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonũ, & Icosaedri triangulũ eiusdẽ sphæræ; & ponitur BCG, triangulũ Icosaedri in eadem sphæra descripti, in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphæra descripti: Ac propterea, ex coroll. 2. propo. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiusdem sphæræ, ideoque ipsi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam vterque continet duas quintas partes suæ circumferentiæ.) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione segmentorum similium, æquales inter se, quam anguli BKC, EOF, inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Ac proinde, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, æqualis erit, & totum triãgulum BCK, toti triangulo EFO, æquiangulum. b Quare erit
b 4. sex. vt BK, hoc est, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icosaedri, ita EO, hoc est, recta D, illi æqualis, latus scilicet alterius cubi, ad EF, latus Icosaedri. Quod est propositum.

PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icosaedri in vna sphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icosaedri in alia sphæra.

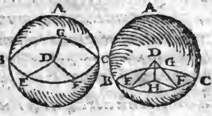
EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Idosaedri non solum habere eandem proportionem quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, vt vult propos. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra.

LEM-

LEMMA I.

SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

SECETVR sphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum BEFGC. Dico BEFCG, esse circulum. Trãseat enim primo planum secans per centrum sphæræ, ita vt centrum D, sit in plano, seu communi sectione BEFCG; ducanturque ex D, centro sphæræ ad extremitatem communis sectionis, lineæ rectæ quotcunque DE, DF, DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadãt; erit ex defin. circuli, figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.



TRANSEAT secundo planum secans nõ per centrũ sphæræ: Ducatur autem ex D, centro sphæræ ad planum secans perpendicularis DH; emittanturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vsque communis sectionis; & connectantur rectæ DE, DF. Quoniam igitur anguli DHE DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti sunt; a erit tam quadratũ rectæ DE, quadratis rectarũ DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata a 47. pri

rectarum DE, DF, æqualium ex centro sphæræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur et quadrata rectarum DH, H*E, quadratis rectarũ* DH, H*F, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ* DH, *reliquum quadratum rectæ* H*E, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare et rectæ* HE, H*F, æquales erunt. Eodẽ argumento ostẽdemus, omnes lineas ex* H, *ad extremitatem cõmunis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus* HE, H*F. Figura igitur plana BEF* CG, *vnica linea contenta, ex defin. circuli, circulus erit; eiusque centrum, punctum* H, *in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.*

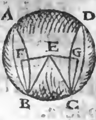
COROLLARIVM

ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si verò planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra: illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales; vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra ęquales, ęqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphęræ, ęquales sunt.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, sint circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter a centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorũ plana perpendiculares EF, EG, quæ per coroll. præcedentis lemmatis in ipsorum cẽtra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias



circulorum vtcunque, connectanturque rectæ EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarũ EF, FB, quã quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro sphæræ ad eius superficiẽ, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale: Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter distant a centro E. 47. pri.

SED iam æqualiter distent circuli AB, DC, a centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, vt prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia esse quadratis rectarũ EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cum circuli æqualiter ponantur distare a cẽtro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit; atque adeo æquales erũt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales sunt. Quod est propositum.

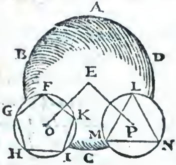
iiii. x.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphęra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri; in vna eademque ſphęra.

IN ſphæra A B C D, cuius centrum E, inſcriptum ſit Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum F G H I K: Item Icoſaedrum, cuius vnum triangulum L M N. Dico eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra, ſiue hæc eadem ſit, quæ ſphæra A B C D, ſiue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, ſuperficiem ſphæræ tangunt; ſi per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per lemma 1. præcedens, duo circuli in ſphæra F G H I K, L M N, comprehendentes pentagonum, & triangulum. [a] Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli F G H I K, L M N; Ac propterea, per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro ſphæræ diſtabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales ſunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter oſtendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icoſaedri deductæ æquales. Quare ſi ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, reſoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde

a 25. quartidecimi.



cum & bases ipsarũ æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales erũt inter se, ex coroll. propos. 6 lib. 12. Eodemque modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, quarum altitudines æquales erũt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. a Quoniam autẽ est, vt basis FGHIK, ad basin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstrauimus, vt duodecim bases Dodecaedri, tota videlicet superficies Dodecaedri, ad basin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri; hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidẽ LMNE. Rursus quia est, (sicut modo diximus) vt tota superficies Dodecadri, ad Icosaedri basin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem scholium, vt tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrum ad 20 pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri: b Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiem, vt cubi latus ad Icosaedri latus eiusdem cum ipsis sphæræ; atque adeo, ex scholio propos. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque alterius sphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque sphæræ quapropter Dodecaedrum ad Icosaedrũ, &c. Quod erat demonstrandũ.

a 6. duodecimi.

b 9. quartidecimi.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero ostensum est quoque, c ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in eadem cum ipsis sphæra: d Item ita esse cubi latus ad latus Icosaedri vnius eiusdemque sphæræ, vt est linea potens totam diuisam quamcunque extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad lineam potentem totam diuisam eandem, & minus illius segmentum: e Item ita esse Dodecaedrum ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in vna eademque sphæra: Perspicuum est, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icosaedri: & superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri: & lineæ potentis totam quamcunque sectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius: & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, esse inter se æquales.

c 9. quartidecimi.

d 10. quartidecimi.

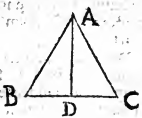
e 11. quartidecimi.

o. xi.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppositum deductæ.

IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris A B, sesquitertium esse quadrati perpendicularis AD. Quoniam enim ob æqualitatem laterũ AB, AC,



a 5.pri. a anguli B,& C, æquales sunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B,& D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C,& D, trianguli A D C; habent autem & latus AD, commune, vel AB, AC, æqualia.

26.pri b Igitur & reliqua latera BD, CD, æqualia sunt; ac propterea latus BC, hoc est, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratũ lateris A B, quadruplum quadrati rectæ B D, ex scholio

c 47.pri propos. 4. lib. 2. c Cum igitur quadrato rectæ AB, æqualia sint quadrata rectarũ AD, BD; erũt quoq; quadrata rectarũ AD, BD, quadrupla quadrati rectæ BD; Ac proinde, qualiũ partiũ 4. est quadratũ rectæ AB, vel quadrata rectarũ AD, BD, talium 1. erit quadratum rectæ B D, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ A D. Quare quadratũ rectæ AB, partium 4. sesquitertiũ est quadrati rectæ AD, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia sesquitertium est, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

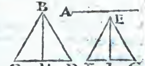
HINC manifestum est, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum. n. est BD, & CD, rectas æquales esse, hoc est, latus BC, secari bifariã à perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, trianguli A B D, æqualia sint lateribus A C,

d 8.pri. AD, trianguli ACD: & basis BD, basi CD, æqualis; d Erunt & anguli BAD, CAD, æquales, id est, angulus BAC, bifariam secabitur ab eadem perpendiculari AD.

THEOR. 13. PROPOS. 13. o. xiij.

SI sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media.

SIT sphæræ diameter Rationalis A. Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta sphæra, esse Mediam. Sit enim BCD, vnum triãgulum Tetraedri, & EFG, Octaedri illius sphæræ, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera opposita CD, FG, perpendiculares BH, EI. a Quoniam igitur quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri B C, b & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, B C, EF, proportionem, quam numeri 6.4.3. c ideoque commẽsurabilia erunt: Quare lineæ ipsæ A, BC, EF, commensurabiles existent saltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.



a 13. tertijdec. b 14. tertijdec. c 6. dec.

RVRSVS, d quia tam quadratum rectæ B C, quadrati rectæ BH, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI, sesquitertium est; habebunt tam quadrata rectarum B C, BH, quam quadrata rectarum E F, E I, proportionem inter se, quam numeri 4.3. e ideoque tam illa, quam hęc inter se commensurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipsæ BC, BH, quam lineæ EF, E I, commensurabiles existent. Est autem & tam CH, ipsi BC, quam FI, ipsi EF, dimidia, videlicet toti, commensurabilis. f Igitur & tam BH, CH, quam EI, FI, commensurabiles inter se erunt; Ac proinde, cum CH, & FI, ostensæ sint Rationales, erunt quoque BH, EI, Rationales. g Quoniam vero tam CH, BH, quam F I, E I, longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem,

d 12. quartidecimi. e 6. dec. f 12. decimi. g 9. dec.

quam

a 12. quarti-decimi. quam 1. ad 3. a cum ostensum sit talium partium 1. esse tam quadratum CH, quam quadratum FI, qualium 3. est tam quadratum BH, quam quadratum E I.) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commensurabiles: b Ac proinde tam rectangulum sub C H, BH, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula BCD, EFG, æqualia rectangulis sub CH, BH, & sub FI, EI, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum bases triangulorum CD, FG, duplæ sint basium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erũt. Quocirca cum tota superficies Tetraedri triangulo B C D, sit commensurabilis; (est enim triangulum BCD, totius superficiei quarta pars.) Itẽ tota superficies Octaedri triangulo EFG, commensurabilis; (Est enim triangulum EFG, totius superficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propos. 24. lib. 10. superficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media. Quod erat ostendendum.

b 22. decimi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse superficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas C H, BH, quam FI, EI, esse Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac propterea rectangula sub CH, BH, & sub FI, EI, hoc est, triangula BCD, EFG, ipsis æqualia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus sit Rationale: perspicuum est, quod infertur.

o. xiiij.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri: Superficies

autem

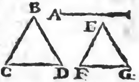
autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

SIT sphæræ diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum BCD; Octaedri vero basis triangulũ EFG. Dico triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG; At vero superficiem Octaedri esse sesquialteram superficiei Tetraedri. a Quoniam enim quadratum diametri A, sesquialterũ est quadrati lateris Tetraedri CD; b duplum vero quadrati lateris Octaedri FG; fit, vt qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. sit quadratum lateris CD; & talium 3. quadratum lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, sesquitertium est quadrati rectæ FG: Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita est triangulum BCD, ad triangulum EFG. (c quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum CD, FG, duplicatam, cũ sint similia.) Igitur & triangulum BCD, sesquitertium est trianguli EFG.

a 13. tertijdec.

b 14. tertijdec.

c 20. & 19. sex.



RVRSVS, quoniam ostensum est triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG; Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. esse triangulum EFG; Fficitur, vt triangulum EFG, octies sumptum, hoc est, tota superficies Octaedri, sit earundem partium 24; At triangulum BCD, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earũdem partium 16. Quam ob rem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphęræ inscribantur, &c. Quod erat ostendendum.

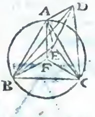
THEOR. 15. PROPOS. 15.

O. XV.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrũ sphæ

ræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basim.

SIT Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus A B C, DAB, DBC, DCA, in sphæra, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E, centrum sphæræ recta DEF, incidens in basim A B C, circulo inscriptam ad punctum F. Dico F, esse centrum basis A B C, & D F, perpendicularem esse ad



eandem basin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro sphæræ ad eius superficiē æquales sunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & bases AD, CD, æquales, cum sint latera triangulorum
a 8. pri. æquilaterorum æqualium.[a] Igitur anguli AED, CED, æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales
b 13. pri erunt,[b] eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, si considerentur triangula B E D, C E D. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, æqualia sunt lateribus EC, EF, trianguli ECF, & anguli ipsis con-
c 4. pri. tenti, ostensi æquales;[c] Erunt bases FA, FC, æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC, si considerentur triangula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in cir-
d 9. ter. cumferentiam circuli cadentes sint æquales;[d] erit F, centrum basis ABC, seu circuli eam circumscribentis.

QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planū circuli ABC, demissa in centrum circuli cadit; efficitur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra. quod est

absur-

absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16. O. xvi.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero vtriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphęrę.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in sphæra descriptum, cuius centrum G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualium altitudinum, quarum basis communis est quadratum subduplum quadrati diametri sphęrę. Ductis enim ex G, centro sphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quæ æquales sunt, cum sint semidiametri sphæræ, ductæ videlicet e centro ad superficiem sphæræ:[a] quoniam quadratum diametri sphærę duplũ est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri, AG, ex scholio propos. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratum rectæ AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cũ ergo quadratum rectæ AG, æquale sit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG;[b] Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGD, recti.[c] Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctæ;[d] atque adeo rectæ AC, BD, se secantes in G, in vno existent plano;[e] Ac propterea rectæ earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodẽ plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum ABCD, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides



a 14. tertijdec.

b 48. pri

c 14. pri

d 2. undecimi.

e 7. undecimi.

ramides ABCDE, ABCDF, quarum basis communis ABCD, vertices vero E, & F; quæ pyramides æquales sunt & similes ex defin. 10. lib. 11. cum quælibet constet ex quatuor triangulis æquilateris octaedri, quæ æqualia sunt & similia, & basi communi ABCD. Dico iam earum altitudines esse æquales, & basin ABCD, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Quoniam enim ostensum est, quadratum lateris Octaedri AB, æquale esse duobus quadratis semidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis semidiametrorum AG, EG; a Ac propterea angulus AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, se mutuo secantibus in G, ad rectos angulos insistit, b ipsa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum, nempe ad basin pyramidum. Quare EG, altitudo est pyramidis A B C D E. Similiter ostendemus FG, altitudinem esse pyramidis ABCDF. Cũ ergo EG, FG, sint semidiametri sphæræ æquales, perspicuum est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Rursus quia AC, est diameter sphæræ; c erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadratis laterum A D, D C. d Quare angulus ADC, rectus est; Eodem modo recti erunt anguli D A B, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum est; Sed & æquilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri, Igitur quadratum est; quod cum sit descriptum ex latere octaedri AB; e constat ipsum esse subduplum quadrati diametri sphæræ. Octaedrum ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

a 48. pri.



b 4. undecimi.

c 14. tertiidec.

d 48. pri.

e 12. tertiidec.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propositionem demonstrauimus in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione octaedri. Veruntamen quia hic demonstratur a Campano, non habita ratione constructionis octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

TE-

THEOR. 17. PROPOS. 17. o. xvij.

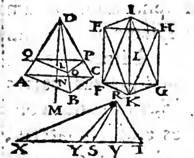
TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimasquartas partes quadrati lateris Tetraedri,& sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphęra descriptum se habet,vt rectangulum sub linea, quę potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri,& sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum,ad quadratum diametri sphærę.

SIT Tetraedrum A B C D, & octaedrum EFGHIK, in vna eademque sphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter sphæræ DM, incidens in basin A B C, ad punctum N. a Erit igitur N, centrum basis ABC,& D N, perpendicularis ad eandem basin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum sphæræ & basin tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia semidiameri, per coroll. 2. propos.13. lib.13. Erit D L, semidiameter talium partium 3. qualium 1. est L N; Ac propterea D N, talium 4. Ducatur deinde, ex scholio propos.15. lib.11.per centrum L, planum OPQ, paralle- a 15. quartidecimi.

a 16. vndecimi. lum plano ABC; a Eruntque rectæ QO, OP, PQ, parallelę rectis A B, B C, C A; Ac propterea triangulũ Q O P, æquiangulum erit triangulo æquilatero A B C, b cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At A B C, est æquiangulum ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & Q O P, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. Ideoque simile ipsi ABC: Sunt autem & triangula DQO, D O P, DQP, triangulis D A B, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides A B-CD, QOPD, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. c Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secant rectas D N, DC, proportionaliter; erit vt D N, ad D L, ita D C, ad D P: Erat autem DN, ad DL. vt 4. ad 3. (cum ostensum sit D N, esse talium partium 4. qualium 3. est D L.) Igitur & D C, ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, d cum pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt constat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4. ad 3. vt constat ex propos. 2. lib. 8. Rursus e quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.



b 10. vn decimi.

c 17. vn decimi.

d 8. duodecimi.

e 20. sex.

SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP; demittaturque ex R, ad S T, perpendicularis R V. f Eritque latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectę DP, talium 27. erit quadratum rectæ RV. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ D C. Igitur linea RV, est potens vigintiseptẽ sexagesimasquartas partes quadrati lateris tetraedri.

f 12. quartidecimi.

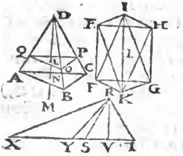
R V R S V S extensa T S, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27.

ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturque T X, bifariam in Y, vt sit TY, talium partium 32. qualium 27. est TS, seu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP, erat, vt 4. ad 3. nempe sesquitertia, erit D C, talium partium 36. qualium DP, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est sesquitertia) ac propterea qualium TY, est 32. Quare linea TY, continet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita esse tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK, vt rectangulum contentum sub recta RV, (quæ potest viginti septẽ sexagesimasquartas partes quadrati lateris D C,) & sub recta TY, (quæ cõtinet octo nonas partes eiusdem lateris) ad quadratum diametri sphæræ.

CVM enim ductis rectis RX, RY, a triangulum RTX, duplum sit trianguli RTY, quod & basis TX, dupla sit basis TY: b Est autem & rectangulum sub RV, TY, duplum eiusdem trianguli RTY; Erit triangulum R T X, æquale rectangulo sub R V, TY. c Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulum sub R V, TY, ad idem triangulum RST: d Est autem triangulum RTX ad triangulum RST, vt basis T X, ad basin S T, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectãgulum sub RV, TY, ad triangulum RST, hoc est, ad triangulum DQP, siue QOP, sibi æquale, erit vt 64. ad 27. Fuit autem & pyramis A B-CD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum sub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis A B C D, ad pyramidem QOPD. At vero vt triangulum QOP, ad quadratum diametri sphæræ D M, ita est pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK. (Nam cum DN, recta sit ad planum ABC, recta quoque erit ad planũ QOP, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoq; sphæræ semidiameter D L, altitudo erit pyramidis seu tetraedri Q O P D: e Octaedrum autem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarum basis cõis quadratum EFGH, dimidium quadrati diametri sphęrę; & altitudines æquales semidiametri sphæræ L I, L K. Pyramides ergo QOPD, E F GH I, æquales habent altitudines. Quare ex scholio pp. 5. lib. 12. erit vt basis QOP, ad basin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidẽ EFGHI; Ac propterea per

a 1. sex.
b 41. pri
c 7. qu.
d 1. sex.
e 16. quartidecimi.

ea,quæ in scholio propos 22.lib. 5. ostendimus, vt basis QOP,ad duplum basis EFGH,hoc est,ad quadratũ diametri sphæræ DM, ita pyramis QOPD ad duplum pyramidis EFGHI, hoc est, ad Octaedrum EFGHIK.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum sub RV, potente viginti septẽ sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC, & sub TY, octo nonis eiusdem lateris DC, contentum ad quadratum diametri sphæræ DM, ita pyramis, seu tetraedrum ABCD,ad octaedrum EFGHIK. Tetraedrum ergo sphæræ impositum ad Octaedrum,&c.Quod erat demonstrandum.



S C H O L I V M.

QVONIAM vero DC,talium partium 4. fuit, qualium 3. DP;continebit DP,seu illi æqualis R T, tres quartas partes lateris tetraedri DC:Ac proinde, [a] *cum recta RT,sit potentia sesquitertia rectæ RV;erit RV,potentia subsesquitertia ipsius RT,nempe trium quartarum partiũ lateris tetraedri. Rursus quia TY,fuit talium partium 32.qualium 27. S T, seu D P; (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit TY,superquintupartiens vigesimas septimas partes ipsius S T, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri.Quare constat,esse quoque tetraedrum ABCD,ad octaedrum EFGHIK,vt rectangulum sub RV, quæ potentia subsesquitertia est trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub TY, quæ superquintupartiens est vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri,vt volebat Campanus.*

a 12. quartidecimi.

o. xvii.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin

oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad BC, eamque bifariam diuidet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 13. Dico AE, triplam esse rectæ DE, quæ scilicet perpendicularis est e centro ad basin ducta. Ductis enim rectis BD, CD, cum latera DA, DB, trianguli ADB, æqualia sint lateribus DB, DC, trianguli BDC; (e centro enim ducuntur) sit autem & basis AB, basi BC, æqualis: Erunt triangula ABD, BDC, æqualia ex coroll. propos. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB, ADC. Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum est trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum sub AE, EB, triangulo ABC; & rectangulum sub DE, EB, triangulo BDC, æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum basis trianguli BDC, dupla sit basis BE, vtriusq; rectanguli; Erit quoque rectangulum sub AE, EB, triplum rectanguli sub DE, EB: a Est autem vt rectangulum sub AE, EB, ad rectangulum sub DE, EB, eiusdem altitudinis EB, ita basis AE, ad basin DE. Igitur & AE, tripla est ipsius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum. a 1. sex.



COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, sesquialtera est reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehensæ. Cum enim AE, tripla sit ipsius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE: Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE, sesquialtera erit ipsius AD.

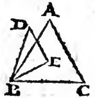
EX quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

THEOR. 19. PROPOS. 19. O. xvij.

SI octaedrum sphęrę inscribatur: erit se-

midiameter ſphærę potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſin quamcunque octaedri ducitur.

SIT baſis aliqua octaedri in ſphæra, cuius centrum D, deſcripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod e centro ſphæræ D, perpendicularis demittatur D E; ducaturque ſemidiameter ſphæræ D B. Dico ſemidiametrum DB, potentia triplam eſſe perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. perpēdicularis DE, in centrum circuli ſphæræ, qui triangulum A B C, circumſcribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta



a 14. ter tijdec. B E; a quoniam quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris Octaedri A B; & quadruplum quadrati ſemidiametri ſphæræ DB, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum
b 12. ter tijdec. lateris AB, 6. & quadratum ſemidiametri ſphæræ DB, 3. b Quia vero quadratum lateris AB, triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ ſcilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qua-
c 47. pri lium 6. fuit quadratum lateris A B. Quare c cum quadratum rectæ DB, æquale ſit quadratis rectarum B E, D E; ſit autem quadratum rectæ DB, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum eſt quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum ſphæræ inſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.

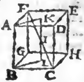
o. xviij. THEOR. 20. PROPOS. 20.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphęrę deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati: Perpendicularis autem à centro ſphæræ in aliquam

baſin

basin cubi demissa, çqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphæra descriptus, cuius centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem IK, çqualẽ esse dimidio lateris cubi. [a] Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi: Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi. a 15. tertijdec.



PRODVCTA autem KI, ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum L; cum KL, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11. Rursus, [b] quia AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE, ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, [c] quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammum erit ABLK; atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam vero perpendicularis KL, e centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, cētra circulorũ dictas bases ambientiũ in sphæra, per coroll. lẽmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariã secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea cum KL, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

b 6. vndecimi.

c 16. vndecimi.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. [d] Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ: [e] Perspicuum au-

d 15. tertijdec.

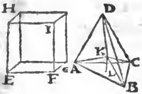
e 31. vndecimi

tem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex B A, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem solidum, quod fit ex perpẽdiculari ex centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquã eius basim ducta in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, solidum autem EFGH, contẽtum sub E I, tertia parte superficiei corporis A B-CD, & sub altitudine FG, quæ æqualis sit perpẽdiculari KL, ducta ex centro K, ad basin A B C. Dico solidum E F G H, æquale esse dato corpori regulari A B C D. Nam ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant bases & altitudines. Cum enim circuli dictas bases ambientes, æquales sint, ipsi æqualiter a centro distabunt, per lemma 2. propos. huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidũ, æquales erunt. Quoniam vero prisma contentum sub basi A BC, & altitudine KL, triplũ est pyramidis ABCK, per coroll. 1. propos 6. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL, tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimi-



rum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis A B C D. Quam ob rem cum idem prisma triplum sit prismatis EFGH, quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, qua ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida EFGH, ABCD, æqualia. Quod est propositum.

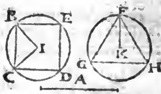
THEOR. 21. PROPOS. 21. 6. xi.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eundem circulum circumscribere & quadratum BCDE, & triangulum FGH, hoc est, circulos BCDE, FGH, ipsa circumscribentes, esse æquales. Sint enim rectæ ex centris IB, KF. a Quia igitur quadratum diametri A, triplum est quadrati lateris cubi BC, & quadratum lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; (Nam ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum subtendat quadrantem; b Ac proinde quadratum rectæ BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare cum rectarum æqualium BI, IC, æqualia sint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BI.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rursus c quia quadratum diametri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG; d & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ B I; æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex

a 15. tertijdec.

b 47. pri



c 14. tertijdec.

d 12. tertijdec.

ipsis

ipsis descripti BCDE,FGH,æquales erunt.Idem ergo circulus comprehendit,&c,Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

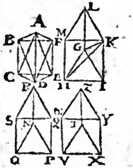
HINC fit lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum,qui bases oppositas tam cubi, quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex centro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipsas circumscribētium,ex coroll.lemmatis 1.propos.10.huius lib.a qui cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt à centro sphærę, ex lemmate 2.eiusdem propos.Ac proinde æquales erunt dictę perpendiculares.Quæ cum sint dimidiatæ partes rectarum,quæ centra oppositarum basium connectunt.(Nam si producantur,perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11. propterea quod parallelæ sunt oppositæ bases in octaedro, ex coroll.4.propos.14. lib.13. quemadmodum & oppositæ bases cubi parallelæ sunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. quod est propositum.

a 21. quartidecimi.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum,atque tetraedrum eidem sphæræ inscribantur;Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem sphæra inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita esse octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus B F, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro A D, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus commune est ipsa diameter AD, & vertex communis A, nempe in B C D A, cuius basis B C D; in B D F A, cuius basis B D F; in C D E A, cuius basis CDE; & in DEFA, cuius basis D E F; quæ quidem omnes bases infra quadratum B C E F, exi-



stunt

ſtunt continentes cum ipſo dimidiatam partem octaedri. Quoniam vero quælibet harum pyramidum conſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quoniam latus ipſorum commune eſt AD, diameter, & reliqua latera, ipſius octaedri latera exiſtunt, a inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum cōtineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Cōſtituatur ſuper GHI, baſin tetraedri, priſma GHIKLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedi triplum erit, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Rurſus, ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, cōſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZα, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. b Quoniam igitur GHI, hoc eſt, TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri: Erit quoque priſma TVXYZα, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex ijs, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualiū quatuor continere diximus octaedrum.) Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZα.

a 8. *pri.*

b 14 *quartidecimi.*

Quia vero priſma TVXYZα, ad priſma GHIKLM, proportionē habet, quā altitudo illius ad altitudinē huius, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZα, quod octaedro æquale eſt, eadē quæ octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrum ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplū tetraedri GHIK, vt altitudo ctaedri ad altitudinem tetraedri: Eſt autē altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarum coniungens, æqualis lateri cubi; nimirum perpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinē tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nā tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito. n. quadrato diametri

ſphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. ideoq; quadratũ lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. a erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri, ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. a Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram,

18. ter dec.

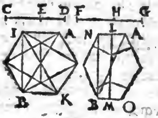
THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineę latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

POSSIT recta AB, rectam CD, & eius ſegmentum maius CE; Item rectam FG, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecae-

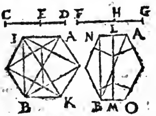
dri,

driseius sphæræ, cuius AB, diameter existit. Intelligatur enim in sphæra, cuius diameter A B, descriptum Icosaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde Icosaedri opposita AI, BK, connectantur recta IB, quæ subtendet vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, vt cõstat ex propos. 16. lib. 13. (Nam in ea figura, ducta recta ZF, erit RSHZF, pentagonum, ob quinque latera Icosaedri æqualia GR, GS, GH, GZ, GF, cadẽtia in superficiẽ sphæræ, in quo recta RH, latera opposita RX, HI, coniungens angulum RSH, subtendit) clariusque patebit ex constructione Icosaedri, quã ad finem lib. 16. ex Pappo afferemus. quod etiam videre licet in aliquo Icosaedro materiali. Quia vero AI, BK, latera opposita parallela sunt, per coroll. 3. propos. 16. lib. 13. [a] erunt anguli AIB, IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cum sint inter se æquales, (Ducta enim alia diametro I K; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus KB, BI; & bases quoque AB, IK, æquales; [b] Erunt anguli AIB, IBK, æquales) recti erunt; [c] ideoque quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB; Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum CD, CE; Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum C E, sit maius segmentum ipsius CD, diuisæ extrema ac media ratione; Item I A, maius segmentum ipsius I B, similiter diuisæ; (Nam I B, subtendit angulum pentagoni, cuius latus est I A, latus Icosaedri. Constat autem, rectæ subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, [d] maius segmentum esse æquale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit CE, maius segmentum ipsi I A, lateri Icosaedri. [e] Cum enim sit vt C D, ad CE, ita I B, ad I A; [f] erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, ita quadratum rectæ I B, ad quadratũ rectæ I A.



a 29. pri.
b 8. pri.
c 47. pri.
d 8. tertiidec.
e 2. quartidecimi.
f 22. sext.

Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA, ad quadratum rectæ I A: Ostensa sunt autem quadratis rectarũ
a 14. quin. CD, CE, æqualia quadrata rectarum I B, I A; a Igitur & quadrato rectæ CE, æquale est quadratũ rectæ IA; ideoque rectæ CE, IA, æquales sunt. Quod est propositum.

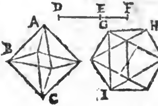


RVRSVS latera Dodecaedri opposita AN, BO, secentur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta LM, & ipsa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales, parallelæ sunt, per coroll. 3.
b 33. pri. propos. 17. lib. 13. b erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Est autem recta L M, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita, per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit, c Ac
c 47. pri. proinde quadratũ rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA. Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale sit positum quadratis rectarũ FG, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea, cum HG, sit minus segmẽtum ipsius FG, sectæ extrema ac media ratione: Itẽ NA, minus segmentum ipsius NB, hoc est, ipsius LM, similiter diuisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus segmẽtum ipsi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac supra demonstrauimus, CE, maius segmentum æquale esse ipsi I A, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri, minus autem segmentum posterioris lineę latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit. Quod erat ostendendum.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmētum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectę: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrū GHI, cuius latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplūm esse quadrati minoris segmenti EF. Cum enim G H, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; [a] erit GH, maius segmentum ipsius G I, diuisæ extrema ac media ratione; [a 8. tertijdec.] [b] Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione. [b 5. tertijdec.] [c] Quia vero quadratum diametri H I, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; [c 47. pri] & quadratum lateris A B, æquale quadratis rectarum DE, E F, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris A B, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarū DE, EF: [d] Est autem quadratum diametri HI, duplum quadrati lateris octaedri AB. [d 14. tertijdec.] Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarum D E, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum D E, E F,



ita

ita eſt quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ EF.
a 2. quartidecimi. (a Nam cum ſit vt GI,ad GH,ita DE, ad E F. b Erit quoque vt quadratum rectæ GI,ad quadratum rectæ GH,ita quadratum rectæ DE,ad quadratum rectæ EF; & compo
b 22. ſex. nendo,vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH,ita quadrata rectarum DE,EF,ad quadratum rectæ EF: Et permutando,vt quadrata rectarum GI, GH,ad quadrata rectarum DE,EF,ita quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque eſt quadrati rectæ EF. Quare ſi latus Octaedri potuerit maius,& minus ſegmentum,&c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuiſa extrema ac media ratione cum minore ſegmento angulum rectum conſtituat; cui recta ſubtendatur: Erit recta linea,quę potentia ſit ſubdupla ipſius rectæ ſubtenſæ, latus octaedri eius ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus exiſtit Dodecaedri.

LINEA recta AB,ſecta in C,extrema ac media ratione conſtituat cum recta A D, quæ æqualis ſit minori ſegmento AC,angulum rectum A,cui recta ſubtendatur BD,ſitque recta E, potentia ſubdupla ipſius BD.Dico E,latus eſſe octaedri illius ſphæræ,in qua AD, vel AC, latus eſt Dodecaedri.Cum enim per coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13.maius ſegmentum BC, latus ſit cubi illius ſphæræ, cuius minus ſegmentum AC, vel AD,latus eſt Dodecaedri;erit diameter illius ſphæræ potentia tripla maioris ſegmenti B C, nempe lateris cubi:



c 4. tertiidec. c Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ,& minoris ſegmenti, tripla eiuſdem quadrati

maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphæræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc est, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter est sphæræ. a Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autẽ recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius A D, latus Dodecaedri ponatur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum. a 14. tertijdec.

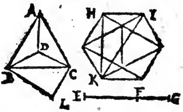
COROLLARIVM.

b QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri, vt constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum BC, sit maius segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum BC,) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum AD,) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit. b 18. tertijdec.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectę; latus Icosaedri eidem sphærę inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.

POSSIT Tetraedri A B C D, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectæ E G, diuisæ extrema ac media ratione: Sit quoque H I, latus Icosaedri H I K, eiusdem sphæræ. Dico HI, rectã potentia esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturq; recta IK, diameter.



a 28. tertijdec. b 5. tertijdec. c 22. pri d 48. pri

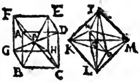
a Quia igitur H I, est maius segmentum rectæ H K, diuisæ extrema ac media ratione; b Erit quoque oomposita KHI, diuisa eodem modo in H, maiusque segmentum HK, & minus HI. c Fiat ex rectis BC,EF,FG, triangulum BCL,ita vt BL, recta ipsi BF,& CL,ipsi F G, sit æqualis, d Eritque angulus L, rectus,quod recta BC,ponatur posse rectas BL,CL,hoc est, rectas EF,FG: Est autem & angulus IHK, rectus, vt propos. 23.huius lib. ostendimus; e Estque vt BL,ad LC, ita KH, ad HI. f Igitur triangula BLC,KHI,æquiangula sunt. g Ac propterea vt KI,ad IH, ita BC,ad CL;& permutando,vt KI,ad BC,ita HI,ad CL. h Atqui IK.diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri BC. Ergo & H I, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius C L, hoc est,minoris segmenti F G. Si latus itaque Tetraedri possit maius, & minus segmentum,&c.Quod ostendendum erat.

e 2. quartidecimi. f 6. sex. g 4. sex. h 13. tertijdec.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem.Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæræ cubus A B C D E F G H,& Octaedrum IKLMNO,quorum centra P,& Q.Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines. (Cum enim circuli descripti circa pyramidum, seu cubi bases æquales, sint çquales, ac propterea æqualiter à cen-



tro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam, [a] Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & octaedri triangulum; æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & octaedri a centro sphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basim pyramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde, ex iis, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstrauimus, sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies videlicet tota cubi, ad basim pyramidis Octaedri; Ideoque rursus, ex eodem scholio, vt cubus ad octuplum Pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

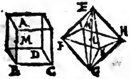
a 21. quartidecimi.

SINT rursus in eadem sphæra cubus ABCD, & octaedrum E F G H I K, sitque diameter sphæræ, seu Octaedri E G, & centrum L. Auferatur autem ex A B, latere cubi tertia pars A M; Item ex semidiametro E L, tertia pars E N. Quoniam vero quadratum I F K H, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrũ secari diximus propos. 16. huius lib. [b] sesquialterum est quadrati BD, lateris cubi BC: Est autem & recta A B, rectæ BM, sesquialtera, ex constructione; reciprocabuntur bases IFKH, BD, & altitudines A B, BM: [c] Ac propterea parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo super basim B D, & sub altitudine A B, nimirum cubo A B C D. Rursus quia recta EL, rectæ EN, tripla est; erit & parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine E L, triplum parallelepipedi super eandem basim, & sub altitudine E N, vt

b 18. tertiidec.

c 34. vndecimi.

in ſcholio propoſ.14.lib.12.oſtendimus: Sed & idem parallelepipedum ſuper baſim IFKH,& ſub altitudine EL, triplum eſt pyramidis IFKHE, ex corollario 1. propoſ.7. lib.12.Igitur pyramis IFKHE,æqualis erit parallelepipedo ſuper baſim IFKH,& ſub altitudine E N: Atqui huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, ex ſcholio propoſ.14. lib. 12. quod & altitudo L N, dupla ſit altitudinis E N. a Item Octaedrum EFGHIK, duplum eſt pyramidis IFKH E. Aequale igitur erit parallelepipedum ſuper baſim IFKH,& ſub altitudine L N, Octaedro EFGHIK.



a 16. quartidecimi.

Cæterum quia parallelepipedum ſuper baſim IFKH,& ſub altitudine BM,eſt ad parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN,vt altitudo B M, ad altitudinem LN,ex ſcholio propoſ.14. lib. 12. Vt autem BM,ad LN,ita eſt AB, ad EL. (Cum enim ſit vt A M, ad MB,ita EN,ad NL:& componendo, vt AB,ad BM, ita EL,ad LN;erit quoque permutando, vt AB, ad EL, ita BM,ad LN.) Et parallelepipedum ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine B M, æquale eſt oſtenſum cubo ABCD: Et parallelepipedum ſuper eandem baſim,& ſub altitudine LN,æquale eſt Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque vt cubus ABCD,ad Octaedrum EFGHIK, ita A B, latus cubi ad EL,ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandũ proponebatur.Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

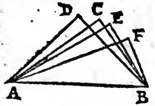
b 13. tertijdec.

QVIA demonſtratum eſt [b]*, diametrum ſphæræ,in qua omnia quinque corpora regularia deſcribũtur,eſſe ſeſquialterã potentia lateris Tetraedri,ita vt,ſi quadratum diametri ponatur 3.partium,earundem 2.ſit quadratum lateris Tetraedri;perſpicuum eſt,ſi ex quadrato diametri data auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, vt in ſcholio propoſ.33 lib.6.oſtẽdimus,latus huiuſce quadrati eſſe Te-*

trae-

traedri latus. Vel etiam, si quadrato diametri constituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodem scholio; maioris quadrati latus esse latus Tetraedri. Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri.

Vt si diameter sphæræ ponatur AB, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB; Vel si constituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, æqualia, ita vt quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC; Erit recta AC, latus Tetraedri.



RVRSVS a *cum ostensum sit, diametrum sphæræ potentia duplã esse lateris Octaedri; Fit, si ex quadrato diametri AB, dematur quadratum rectæ AD, quod dimidium sit quadrati diametri AB; Vel si cõstituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, æqualia, & inter se proportionem habentia æqualitatis, secundum doctrinam scholij propos. 33. lib. 6. rectam AD, latus esse Octaedri.* a 14. tertijdec.

DEINDE, b *quoniam docuimus, diametrum sphæræ potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars sit quadrati diametri AB; Vel si quadrato diametri AB, construantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita vt quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC, iuxta doctrinam eiusdem scholij propos. 33. lib. 6. Lineam rectam BC, cubi latus existere. Vel certe cum diameter AB, possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratum lateris cubi BC; Quemadmodam e contrario, si ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.* b 15. tertijdec.

PRAETEREA, *quia si recta aliqua potuerit totam*

quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum a; *Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphæra, cuius diameter est recta prior linea; Constat si quadrato diametri AB, exhibeantur, iuxta ea, quæ in scholio propos 33. lib. 6. demonstrata sunt a nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuisa ad maius segmentum; Rectam minorem BE, esse Icosaedri latus.*

a 23. quartidecimi.

POSTREMO, quoniam si recta quæpiam potuerit totam aliquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius segmentum; b *Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæra, cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri AB, constituātur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunque recta linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum; Minorem lineam BF, latus esse Dodecaedri.*

b 23. quartidecimi.

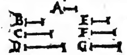
HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidē sphæra impositorum scripserunt. Sequētes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adijciemus, quæ ad eorundē quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT

SINT qratuor rectæ A,B,C,D, continue proportionales; necnon quatuor A,E,F,G, ita vt A, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad secundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundæ ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; a habeat autem & quadratum a 20. sex rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A:



Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F;

quadr.	*B.*	*Recta C.*
quadr.	*A.*	*Recta A.*
quadr.	*E.*	*Recta F.*

Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E: vt recta C, ad rectam F: b Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum. b 20. sex

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; c habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad, rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo c 33. vndecimi.

Cubus	*B.*	*Recta D*
Cubus	*A.*	*Recta A.*
Cubus	*E.*	*Recta G.*

vt recta A,ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ B. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D,ad rectam A;& cubus rectæ A, ad cubũ rectæ E,vt recta A, ad rectã G;Erit ex æquo,cubus rectæ B,ad cubum rectæ E, vt recta D,ad rectam G:[a] Est autem pro-

a 33. vndecimi. portio cubi rectæ B,ad cubum rectæ E,triplicata proportionis rectæ B,ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E, Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineæ rectæ,&c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HOC idem demonstrauimus ad propos. 10 lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A,ad latus oppositum BC,recta perpendicularis AD,quæ bifariam secabit latus BC,vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris AB.[b] Inueniantur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris AB,ad triangulum ABC, habere proportionem duplicatam lateris AB, ad rectam E. Cum enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1.[c] Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale



b 13. sex

c 17. sex

qua-

quadratum rectæ E; Aequalia erunt triangulum ABC, & quadratum rectæ E. a Quoniam vero quadratum lateris AB, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris AB, ad rectam E; Constat, quadratum lateris AB, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam lateris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum. a 10. sex

COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidiū lateris: æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectę E, quæ media proportionalis est inter AD, DB, æquale esse triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphęra describantur: erit quadratū cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.

SIT quadratum cubi cuiusuis ABCD, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum EFG, in quo perpendicularis EH, ex angulo E, ad latus oppositum FG, deducta diuidens FG, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum AC, ad triangulum EFG, vt latus trianguli E F, ad perpendicularem EH.



Posita enim inter EH, FH, media proportionali IK; b cum quadratum lateris Tetraedri E F, duplum sit quadrati lateris cubi A B; c sit autem & duplum rectanguli sub latere EF, & dimidio eius F H, eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe EF: Erit rectangulum sub EF, FH, æquale quadrato lateris AB; d Ac propterea AB, media proportionalis b 18. tertiidec. c 1. sex d 17. sex.

erit

erit inter EF,FH,hoc eſt,tres rectæ FH,AB,EF, continue erunt proportionales:Sunt autem & tres rectæ FH, IK, EH,continue proportionales, ex conſtructione. Igitur
a 28. quarti-decimi. cum omnium antecedens ſit FH,[a] erit proportio rectæ EF,ad rectam EH, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ AB, ad rectam IK, ſecundæ ad ſecundam duplicata.Quare cum & quadratum AC, rectæ AB, ad quadratum rectæ IK, hoc eſt, ad triangulum EFG, (eſt enim ex coroll. propoſ. 29. huius lib. quadratum rectæ IK,æquale triangulo EFG,) [b] proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ AB,ad rectam IK;Erit quadratum cubi AC,ad triangulum Tetraedri EFG,vt latus EF,ad perpendicularem EH. Quocirca ſi cubus & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

	FH.
AB.	IK.
EF.	EH.

b 20. ſex

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis vero, ſiue altitudo Tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti.

SIT Tetraedri triangulum ABC, & altitudo, ſeu axis Tetraedri DE, latuſque cubi eiuſdem ſphæræ F. Dico latus Tetraedri AB, eſſe potentia ſeſquialterum axis DE: Axem vero DE,potentia ſeſquitertium lateris cubi F. Nã

c 5. quar circa triangulum [c] deſcripto circulo ABC; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis DE,vt conſtat ex propoſ. 15. huius lib. ducatur AD, ſemidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris AE, hoc



d 47. pri e 12 ter tijdec. eſt,lateris AB, [d] æquale eſt quadratis rectarum AD,DE,[e] & triplum quadrati ſemidiametri AD;Fit,

vt posito quadrato lateris AB, seu AE, partium 6. quadratum rectæ AD, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis DE, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.

QVONIAM vero latus Tetraedri A B, a potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris AB; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE. Igitur quadratum axis DE, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum. a18. tertijdec.

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. b quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Earundem vero partium 4. ostensum est quadratum axis DE: perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, c cũ quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ.n. proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4.6.9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13. b13. tertijdec. c20. sex

COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet d tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deductæ, quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi. d 12. quartidecimi.

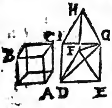
THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus A B C, & Tetraedrum D E F G. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma D E F G H I, eandem habens cum Tetraedro al-

a 30. *quartidecimi.*

titudinem.[a] Quoniam igitur est basis prismatis,seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam,ita est,per coroll.2.propos.31.huius lib.altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEFGHI,ad latus cubi, ideoque ad altitudinē cubi,seu prismatis A B C; Erit basis prismatis A B C, ad basim prismatis D E F G H I, vt huius altitudo ad illius altitudinem.Quare,per ea,quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus,æqualia erunt prismata A B C, DEFGHI, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG,ex coroll.1.propos.7,lib.12.Cubus ergo ABC,triplus quoque erit eiusdem tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendum erat.



COROLLARIVM.

VNDE prisma eandem habens & basim,& altitudinem cum Tetraedro,æquale est cubo in eadem sphæra,in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum A B C, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

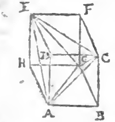
ET SOLIDORVM QVINTVM vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1. j.

IN dato cubo pyramidem describere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat describere pyramidem, seu tetraedrũ. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarum extremitatibus A, G, C, similiter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus basibus, quæ extrema priorum trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadra-

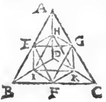


torum æqualium æquales sunt, quod potentia duplæ sint laterum æqualiũ quadratorum, vt in scholio propos. 47 lib. 1. demonstrauimus, perspicuũ est, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; Ac propterea pyramidem, seu tetraedrum constitui ex ipsis. Quia vero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 31 lib 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

ij. PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro ABCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra



idem planum consistunt. Quoniam vero latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod sint anguli triangulorum æquilaterorũ

4. pri. ABD, ACD: a æquales erunt bases EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque octaedrum componunt EIKGH; quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra tetraedrum descriptum est; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

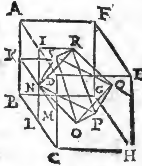
COROLLARIVM.

QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, sese mutuo ad angulos rectos secantia, vt in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIkD, & prisma HIKGAE: necnon in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualẽ, & prisma prismati: a Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FkHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari tribus quadratis æqualibus, quę octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant. a 8. duodecimi.

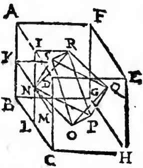
PROBL. 3. PROPOS. 3. iii.

IN dato cubo octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, puncto, quod quidem centrum est quadrati ABCD, vt constat ex demonstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basiũ centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur



omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum, vt perspicuum est ex prædicta demonstratione propos. 8. lib. 4. Postremo si præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; constituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, supra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia sunt lateribus KN, KS, triangu-



li KNS, quod omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictũ eſt; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cũ N I, IR, parallelæ ſint rectis BA, AF; [a] angulus NIR, æqualis eſt recto angulo K A F, in quadrato A G, eademq; ratione angulus N K S, angulo recto I A F, in quadrato AE; [b] Erunt baſes NR, NS, æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe; ſi nimirum e centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, e quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim vides duas rectas N I, RI, ductas eſſe ad I, dimidium lateris AD, quod commune eſt quadratis AC, AE, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, SK, ductæ ſunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis AC, AG, quorum centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam ob rẽ conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt N O Q R S P; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cum omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 10. vndecimi.

b 4. pri.

ALITER. [c] In cubo dato inſcribatur pyramis; [d] In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera vero pyramidis, ex demonſtratione propoſ. 1. huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cum ſint harum baſium diametri; perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi; atque adeo Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

c 1. quintidec.

d 2. quintideci.

CO-

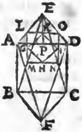
COROLLARIVM.

QVIA vero diametri Octaedri in cubo descripti NQ, RO, (si ducerētur,) se mutuo secāt ad angulos rectos, ex coroll. 1. prop. 14. lib. 13. quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum sese mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hic ostendimus, diuidere.

PROBL. 4. PROPOS. 4. iiii.

IN dato octaedro cubum inscribere.

DATVM octaedrum sit A B C D E F, in quo oporteat describere cubum. Quomiam in octaedro sex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices sunt sex anguli octaedri, & quælibet duæ octaedrum constituunt; sit vna earum pyramis A B-CDE, cuius basis AB C D, quadratum, triangula vero æquilatera A B E, E B C, C E D, D E A, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur



rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus A B, B C, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, N E O, OEL, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC; CED, DEA, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habent communia. Est enim EM, latus cōmune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; & denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim sit, triangulū LME, triāgulo EMN; hoc vero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ L M, M N, N O, O L, inter se æquales sunt. a Quia vero ducta recta EK P, tripla est rectæ K P, b Est autem vt E P, ad KP, ita E A, ad L A; Erit quoque E A, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, E C, E D, triplæ erunt rectarum M B, N C, O D. Quocirca rectæ L M, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque

a 18. quartidecimi.
b 2. sex.



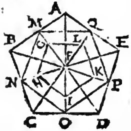
constituent LM N O. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano;
a10.vndecimi. a æqualis erit angulus M L O, angulo BAD, qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniã vero tam planũ per LO, LM, quam per NM, NO, ductũ,
b15.vndecimi. b parallelum est plano ABCD, c ipsa, cum conueniant in punctis M, & O. vnum planum efficient, ex scholio
c15.vndecimi. propos. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia sint lateribus E O, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri E A D, ducta bifariam secet angulum AED,
d 4.pri. per coroll. propos. 12. lib. 13. d Erunt & bases KL, KO, æquales, hoc est, recta LO, bifariam secabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum sint laterum quadrati LN, dimidia, æquales inter se erunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum re-
e4. pri. ctos, e æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, K G, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano existunt quadrati L N, angulosque comprehendunt re-
f 13.pri ctos; (f cum enim anguli LKG, G K I, IKO, duobus sint rectis æquales; Sint autem L K G, IK O, per corollarium 2. propos. 32. lib. 1. semirecti; rectus erit angulus G KI; Eademque ratione recti erunt anguli KGH, GHI, HIK.) quadratum erit GHI K, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, describentur similiter quadrata: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem

ex

ex defin.31.lib.11.intra Octaedrum descriptus erit, cum octo eius anguli tangāt octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 5. PROPOS. 5. V. VI

IN dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere.



SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continētur, quarum videlicet bases sunt pētagona ex quinque Icosaedri lateribus composita, vertices vero, duodecim anguli Icosaedri, vna pyramis ABCDEF, cuius basis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, sintque horum triangulorum centra, G,H,I,K,L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI,IK, KL,LG. Rursus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM,FN,FO,FP,FQ; quæ ex scholio propos.12.lib.13. bifariam secabunt latera AB,BC, CD,DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales sint, quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, [a] æquales quoq; erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q. connectentes; [b] Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æquālium ad bases oppositas demissæ. Dum enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BM, trianguli FBM, æqualia sint, contineantque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; [c] erunt bases FM, FN, æquales; & sic de reliquis. Quoniam vero & rectæ FG, FH, FI, FK, FL, nimirum semidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circumscribētiū, æquales sunt, & angulos

a 4. pri.
b 8. pri.
c 4. pri.



a 4.pri. b 13.pri comprehendunt æquales, vt demonstratum est; [a] Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. [b] Rursus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quam anguli BNM, MNO, ONC, æquales sunt duobus rectis. c 4.pri. [c] Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter se, & hisce ęquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, existens. Denique cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter secentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales sint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, dnplæ sunt ipsarum GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propos. 18. lib. 14. d 2.sex. [d] parallelæ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipsis MN, NO, OP, PQ, QM; e 10.vndecimi. [e] Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter se æquales erunt. f 15.vndecimi. [f] Quia vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta parallela sunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto conueniuntque in recta HI, ipsa vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Eodemque modo ostendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum constituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL, pentagonum est æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod si eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icosaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quamobrem duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum constituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icosaedro erit descriptum, cum viginti anguli dodecaedri in centris viginti basium Icosaedri consistant. Quapropter in dato Icosaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendū.

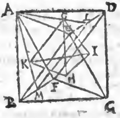
COROLLARIVM.

ITAQVE cum omnes rectæ è centro Icosaedri ad centra basium, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint æquales; (Cũ enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. perpendiculares sint ad plana circulorũ æqualium bases Icosaedri circũscribentium, atque adeo eorundem distantiæ existant à centro sphærę, seu Icosaedri; æquales erunt inter se, ex lemm. 2. eiusdem propos. 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atque sibi inscripti Dodecaedri.

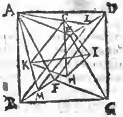
PROBL. 6. PROPOS. 6. O. V.

IN dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro AB C D-EF. In pyramide octaedri superiori A B C D E, sumantur G, & H, centra triangulorum ex aduerso sibi respondentium AED, BE C; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerso quoque sibi correspondentium CFD, AFB: quæ quidem centra coniungantur sex rectis GH, GI, GK, HI, HK, IK, vt fiat pyramis HIK G. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ A L, A M, secantes latera opposita octaedri DE, B F, bifariam in L, & M, per scholium propos. 12. lib. 13. coniungaturque recta L M, a quæ ipsi BE, vel FD, æqualis & parallela erit: cum EL, B M; Item D L, FM, rectæ æquales sint, & parallelæ, nimirum dimidia laterum DE, B F, oppositorum in quadrato E F. Quoniam vero rectæ A L, A M, a 33. pri



sectæ sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quod AG, AK, duplæ sint ipsarum GL, K M, ex coroll. propos. 18. lib. 14. b Erunt GK, LM, parallelæ; Ac propterea, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ALM, AGK, similia. c Quare erit vt AL, ad L M, ita A G, ad G K; & permutando. b 2. sex. c 4. sex.



a 18. *quarti-decimi.*

vt AL, ad AG, ita LM, ad GK. Est autẽ AL, ipsius AG, sesquialtera;[a] quod GL, sit tertia pars ipsius AL, ideoque AG, eiusdem AL, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc est, ipsi æqualis DF, sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearũ cẽtra G, H, I, K, cõiungentiũ sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem HIKG, componentes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoque Tetraedrum constitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

b 4. *quarti-decimi.* 1. *quinti-decimi.*

ALITER. b In octaedro dato inscribatur cubus, c & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri; & in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.

COROLLARIVM I.

d 9. *vndecimi.* e 15. *vndecimi.*

QVIA vero ostensum est, vtramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM, d ac propterea & GK, ipsi DF, atque adeo ipsi BE, parallelam esse: e Atque eadem ratione KH, ipsis FC, EA, parallelum esse: d Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum esse plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallelas, binis nimirum singula: Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singulas videlicet binis oppositis.

COROLLARIVM II.

PRAETEREA cum octaedrum circumscribat & cubum, &

tetrae-

tetraedrum in cubo descriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium octaedri constituantur: Atque adeo recta coniungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphæræ circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptũ, vt constat ex 4. propos. huius lib. Sit aũt diameter sphæræ sesquialtera axis tetraedri in ea sphæra descripti per coroll. 1. propos. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectam, quæ centra basium octaedri oppositarum coniungit, sesquialteram esse axis tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deductæ.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

o. vii.

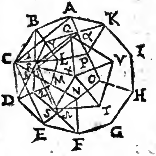
IN dato dodecaedro Icosaedrum describere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppositum BL, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem YK, YD, rectas AP, CM, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiusdem propositionis, quod & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona descriptorum bifariam diuidant, (a constat enim rectas AK, PK; Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) b Igitur Aα, Cβ, paralle



a 28. ter
b 28. pri

a 9.vndecimi. læ sunt rectæ BY, a atque adeo & inter se parallelæ: Sunt
b4.pri. autem & æquales, nempe dimidia rectarum A P, C M, b quæ æquales sunt, cum latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia sint, angulosque contineant



c33.pri æquales. c Rectæ ergo ipsas connectentes AC, $\alpha\beta$, æquales erunt & parallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectæ C L, E N, per centra R, S, rectæ ducantur B Z, FZ, connectanturque rectæ C E, $\gamma\delta$, æquales esse ipsas C E, γ δ:
d 4.pri. d Sunt autem A C, C E, inter se æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera dodecaedri A B, B C, quam CD, D E, angulum pentagoni æquianguli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus X, vt figura monstrare videtur, sed extrorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, æquales erunt. Quapropter cum & rectæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales sint, (Nam YQ, YR, Z R, Z S, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum BL, DM, a centris Q, R, S, circulorum æqualium,
e14.ter qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, e atque adeo æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, distantiæ sunt rectarum æqualium AP, CM, C L, E N, a centris eorundem circulorum æqualium, f ideoque æquales; Ac pro-
f14.ter. inde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt.) g Erunt quo-
g8. pri. que anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cum & re-
h 4.pri. ctæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales sint; h æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula Q X R, R X S, S X T, T X V, V X Q, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N, O, P, constituta, æquilatera erunt & æqualia. Quod si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construan-

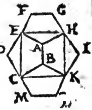
tur.(Habet enim dodecaedrum viginti angulos solidos.) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 8. PROPOS. 8. 6. viij.

IN dato Dodecaedro cubum describere.

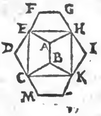
PROPONANTVR quatuor pẽtagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus, ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidẽ ABCDE, ABKIH, secundum latus idem commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundum angulos EAH, CBK. In his vero pentagonis subtendantur angulis A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK, quadrilaterum efficientes EHKC, quod æquilaterum erit. Cum enim omnia latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia sint, angulosque contineant æquales, ex hypothesi; a æquales erunt bases EH, HK, KC, CE. b Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, au- a 4.pri ferunt ex circulo pentagonum ABCDE, circumscriben- b 28.te te arcus æquales; Erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. rectæ AB, CE, parallelæ. Eademq; ratione parallelæ erunt AB, HK. c Quare & EC, HK, inter se parallelæ erunt; d Ac propterea rectæ EH, CK, quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, e in eodemque cum ipsis plano; ideoque parallelogrammum erit EHKC; quod ostẽdimus esse æquilaterum. Quia vero planum ECKH, productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 1. propos. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK, descriptum; f Erunt tam anguli oppositi E, K,

c 9. vndecimi. d 33. pri e 7. vndecimi.



f 22. ter

a 34.pri quam C,H,duobus rectis æquales ; a Ac propterea cum oppositi E,& K,sint æquales,necnon & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli E,C,K,H,recti . Quare EK, quadratum erit , collocans suos angulos in quatuor angulis dodecaedri,& latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri . Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo aliæ rectæ subtendantur eodem ordine;constitutum erit solidum sex quadratis con-
b 4.pri. tentum;quæ cum sint æqualia , b eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendentia æqualia sunt;cubum constituent intra Dodecaedrum descriptũ. propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri,eiusq; octo anguli in octo Dodecaedri angulis resident . In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus . Quod erat faciẽdum.



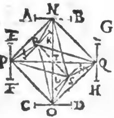
COROLLARIVM.

HINC fit,rectam,quæ subtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri . Ostensum enim est,CE,ipsi AB,esse parallelam .

o.
PROBL. 9. PROPOS. 9.
ix.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SVMANTVR in Dodecaedro , cui inscribendum sit octaedrum,sex illa latera , quæ opposita esse diximus in corollario 3.propos.17.lib.13.nimirum AB,CD,EF,GH, IK,LM,quæ bifariam secentur in N,O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO,PQ,RS, sectiones oppositorum laterum coniungẽtes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphæræ bifariam , & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propos. 17.lib.13.atque adeo æquales quoq; erunt earum dimidiatæ partes N T,
c 4.pri. OT,PT, QT, RT, ST. c Quo circa



duodecim rectæ ſubtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales ſunt NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineãtur; Ac proinde octo triãgula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erũt, cõſtituentq; octaedrum intra Dodecaedrũ deſcriptũ, cũ ſex anguli octaedri tangãt ſex latera Dodecaedri oppoſita, ex cõſtructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrũ deſcripſimus. Quod faciẽdũ erat.

PROBL. 10. PROPOS. 10. o. x.

IN dato Dodecaedro pyramidem deſcribere.

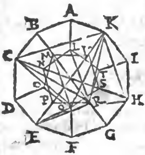
SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo deſcribenda ſit pyramis, ſiue tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum ſolidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidẽ C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri LT, cõi pẽtagonis KLT, LTP; Denique R, lateri LN, cõi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex pũctis C, K, R, ad angulum Q, ipſi L, oppoſitum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt ſit pyramis conſtructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, ſeu ſphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; a quoniam dodecaedrum in ſphæra deſcribitur; ſi planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius ſectio cum ſphæra circulus per lemma 1. propoſ. 10. lib. 14.[b] Ac propterea angulus CKH, in ſemicirculo exiſtens, rectus erit. Non ſecus oſtendemus rectos eſſe angulos CRH, KRE, KQE,



b 17. tertij dec.

a 31. ter.

a 47.pri



RQM, CQH. [a] Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Aequalia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH; (Hæ.n.

b 4.pri. rectæ cum subtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehensos, [b] æquales sunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera sunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componūt CKRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor

c 8.quintidec. angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrū.

ALITER. [c] In proposito Dodecaedro cubus describatur; [d] & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod

d 1.quintidec. proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

o.
xi.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

e 5.quintidec. [e] DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrū; [f] & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod pro-

f 8.quintidec. ponitur. Cum enim anguli cubi resideant in angulis Dodecaedri; anguli vero Dodecaedri in centris basium Ico-

saedri

saedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam ob rem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 12. PROPOS. 21.

o xii.

IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

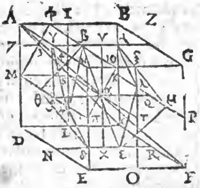
IN dato Icosaedro a cubus describatur, b & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. c Cum enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri; Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

a 11. quintidec. b 1. quintidec. c 11. quintidec. d 1 quintidec.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

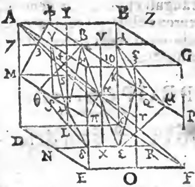
IN dato cubo Dodecaedrum describere.

SIT in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis I L, YZ, ξO, Mπ, KP, NR, nusquam inter se coeunticus, ita vt ductæ in basibus oppositis sint inter se parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducan-



Ducatur in figura recta Ha-C.

tur,



tur, sed vna duntaxat, quæ rursus bifariam secentur in S,V,T,ρ,Q,X, connexis rectis ST,VX,ρQ,quæ se mutuo in centro α, bifariam secāt,& ad angulos rectos, vt in coroll.propos.3.huius lib. docuimus, suntque lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia rectarū YZ.Mπ,secentur extrema ac media ratione in β,γ,θ,κ,vt sint maiora segmenta,Yβ,Zγ,Mθ,$\pi\kappa$,ductis rectis Yρ,Yκ,$\beta\theta$,$\beta\kappa$. Quoniam ergo Yρ, YV,dimidio lateris cubi sunt æquales;& $\rho\kappa$,βV, segmenta minora rectarum æqualium YV,$\rho\pi$, æqualia quoque: a Sunt autem quadrata rectarum YV,βV,tripla quadrati rectæ Yβ;Erūt & quadrata rectarum Yρ,$\rho\kappa$, tripla eiusdem quadrati rectæ Yβ.Quare,b cum quadratis rectārum Yρ, $\rho\kappa$, æquale sit quadratum rectæ Yκ, c quod angulus Y$\rho\kappa$, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Yκ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rursus,quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, d recta est ad planum AE,per rectas AY,Yρ,ductum,rectus erit angulus βYκ,ex defin.3. lib. 11. e Ac propterea quadratum rectæ $\beta\kappa$,æquale quadratis rectarum Yκ,Yβ,existēs,quadruplum erit quadrati rectæ Yβ, (quia nimirum quadrata rectarum. Yκ, Yβ, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ Yβ, cum quadratum rectæ Yκ, triplum sit ostensum quadrati rectæ Yβ.)Ideoque f cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta $\beta\kappa$, rectæ Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis,vt in his numeris 1.2.4.apparet: Est autem & $\theta\kappa$,dupla ipsius $\rho\kappa$, quod minora segmenta $\theta\rho$, $\kappa\rho$ rectarum æqualium Mρ,$\pi\rho$, æqualia sint. g Erit igitur vt Yβ,ad $\rho\kappa$,ita $\beta\kappa$,dupla ipsius Yβ, ad $\theta\kappa$,duplam ipsius $\rho\kappa$; Est autem Yβ, maius segmentum ad $\rho\kappa$, rectam minori segmento βV,equalem,vt tota ad maius segmentum. Ergo & $\beta\kappa$,ad $\theta\kappa$,erit vt tota ad maius segmentum;Ac proinde

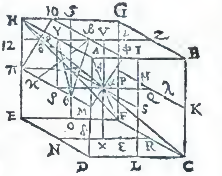
a 4. tertij dec.
b 47. pri
c 29. pri
d 4. undecimi.
e 47 pri
f 20. sex.
g 15. quinti.

inde θκ, erit maius segmentum rectæ βκ, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus θκ, maius esse segmentum rectæ βθ, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta Yθ. Quare æquales erunt Cθ, βκ, constituentes triangulum Isosceles Cθκ, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus; Ac proinde θκ, erit latus pentagoni in circulo triangulum βθκ, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.

INTELLIGATVR iam planum trianguli βθκ, extendi, (ducta per β, recta Cφ, ipsi Mϖ, parallela,) per parallelas Mϖ, φ 10. vt sit planum extensum φπ, occurrens diametro AC, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi Aφ, parallela, connectaturque M S, a quæ parallela est vtrique Aφ, 73, Quoniã igitur per coroll. propos. 4 lib. 6. triangulũ A 73. simile est triãgulo AMS; b ac proinde vt AM, ad MS, ita est A 7. ad 73. Sunt aũt AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoque A7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad Aφ, ita M7. ad 73. Est autem Aφ, maius segmentum rectæ M A, diuisæ extrema ac media ratione. (c quod æquales sint Aφ, YC, necnon & MA, YV, dimidia cubi latera.) Igitur & 73. hoc est, 7A, maius segmentum erit rectæ M7. extrema ac media ratione sectæ; d Ac propterea tota MA, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusque segmentum erit M 7. e Atqui vt M7. ad 7A, ita est S3. ad 3 A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiusque segmẽtum est S3. f Quia vero SαT, parallela est ipsi Mπ; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS; si per SαT, planum ducatur parallelum plano φπ, ducto per Mπ, g secabuntur rectæ AS, Aα, in easdem rationes, in punctis 3. & 4. cum planum φπ, rectas AS, Aα, secet in 3. & 4. at planum per SαT, ductum plano φπ, parallelum easdem secet in S, & α. Atque idcirco, cum AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo Aα, semidiameter cubi, in 4. maiusque segmentum erit α4.

a 33. pri
b 4. sex.
c 34. pri
d 5. ter. tijdec.
e 2. sex.
f 33. pri
g 17. undecimi.

IISDEM argumentis oftendemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, femidiametrum cubi fecari in 9. puncto extrema ac media ratione a plano φπ, vt perfpicuum eft, fi cubus inuertatur, vt in hac figura fecūda apparet. Sunt enim lineamēta omnino fimilia lineamentis prioris figuræ, licet bafes cubi fedes mutauerint, ita vt quadratū AC, locū quadrati HF; & quadratum HF, locum quadrati AC, obtineat in hac fecunda figura.



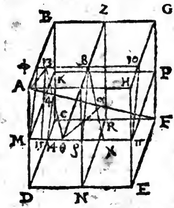
Quod tamen in prima figura, fine hac inuerfione probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi HC, in ea figura; (Hæc deeft in figura, quam tamen quilibet ducere poterit) quā planum φπ, fecet in 9. prope punctum H; intelligaturque per rectam AH, planum plano φπ, parallelum. Quonia igitur rectæ Aα, Hα, in centro α, conueniunt, fecanturque planis parallelis in punctis A, H; & 4, 9; (Nam planum φπ, eas fecat in 4. & 9. planum vero per AH, ductum plano φπ, parallelum eafdem fecat in A, & H;) [a] erit vt α 4, ad 4 A, ita α 9, ad 9 H. Cum ergo αA, fecta fit in 4, extrema & media ratione, erit quoque αH, fimiliter fecta, quæ quidem demonftratio locum etiam habet in hac cubi inuerfione in fecunda figura. Oftendamus nunc, fi rectæ iungantur θ4. β 4, β9. κ9, rectilineum β4θκ9. in plano φπ, exiftens, pentagonum effe æquilaterum, & æquiangulum.

[a] 15. vndecimi.

INVERTATVR rurfum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirum continent triangulum βθκ, fiue planum φπ, hunc fitum habeant, quem monftat tertia hęc figura. Deinde in plano φπ, recta coniuncta θ 4. extendatur vfque ad rectam ρ 10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta KP, & iunctis rectis MK, π P. [b] planum MP, parallelum eft plano AG, (quod & rectæ PK, KM, paral-

[b] 15. vndecimi

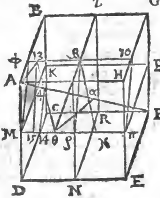
lelæ sint rectis GB,BA,)[a] secatque cubum bifariam; ideo que per centrum α, transit, per ea quæ in schol. propos. 39. lib. 11 ostensa sunt; si per rectas α 4 A, θ 4 13. planum extendatur,[b] fient αθ,A 13.communes sectiones planorum MP,AG,parallelæ; Ac proinde triãgula αθ4.1α34. æquiangula erunt;[c] Eritque vt α 4 ad 4 A, ita θ4. ad 413. Quare cum αA,in 4. secta sit extrema ac media ratione, vt ostendimus; eodem modo erit secta ϑ13. in 4. Rursus plano NZ,per centrum α,transeunti,parallelum ducatur planum per punctum 4.ex schol.propos.15.lib.11.secans φπ, recta 4 14.[d] Est autem eidem plano NZ, parallelum planum DB.[e] Rectæ igitur α A, ρM,in easdem rationes secabuntur in punctis 4.& 14.Quocirca & ρ M, in 14. secta erit extrema ac media ratione, minusque erit segmentum 14 M,ideoque æquale minori ρϑ,ipsius Mρ.Quare cum ex ρ14.maiori segmento ipsius ρM, auferatur ρϑ, minus segmentum; Erit, vt demonstrauimus ad propos.5.lib.13.ρ14. diuisa in θ,extrema ac media ratione,maiusque segmẽtum erit ρϑ Postremo acta per 13.recta 13.15. rectæ 4. 14.parallela, [f] secabuntur rectæ θ13. ϑ15. proportionaliter; Ac proinde & ϑ15. secta erit in 14.extrema ac media ratione,maiusque segmẽtum erit ϑ14. [g] Quapropter erit vt ρ ϑ, maius segmentum ad ϑ 14.minus,ita θ 14. maius ad 14. 15. minus: Vt autem ϑ 14. ad 14. 15. ita est tota ϑ15. ad θ14. maius segmentum. Igitur erit vt ρ ϑ,ad θ 14. ita ϑ 15.ad eandem ϑ 14. Ac propterea rectæ ρθ, vel ρχ.& ϑ15.æquales erunt Quoniam vero planum NZ,& planum illi parallelum per 4.14.ductum, secantur plano φ π,[h] erunt communes sectiones βρ, 4. 14. parallelæ,ideoque& 13.15. βρ.parallelæ erunt,[i] angulusque externus β ρ χ, interno 13. 15ϑ. æ-



[c] 32. vn decimi.
[b] 16. vn decimi.
[c] 4. sex.
[d] 15. vn decimi.
[e] 17. vn decimi.
[f] 2. sex.
[g] 2. quartidecimi.
[h] 16. vn decimi.
[i] 29. pri.

qualis. Cum igitur & latera $\beta\rho, \rho\kappa$, lateribus 13. 15. 15θ[a] sint æqualia. a æquales erunt quoque rectæ $\beta\kappa$, 13 θ. Ac proinde & earum segmenta maiora $\theta\kappa$, θ4, (Ostensum enim est $\theta\kappa$, esse maius segmentum ipsius $\beta\kappa$,) æqualia erunt. Eadem arte & ζ4, ipsi $\beta\gamma$, in prima figura ostendetur æqualis, si simili situ triãgulum Isosceles formetur super basim $\beta\gamma$, cuius vertex consistat in puncto , quod rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eisdem $\theta\kappa$, $\zeta\gamma$, æquales erunt κ9. ζ9. Aequilaterum ergo est pentagonum β4 $\theta\kappa$ 9, quandoquidem $\beta\gamma$, $\theta\kappa$, rectæ æquales sunt, cum componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarũ, quales sunt YV, ZV, $\varpi\rho$, Mρ. Sed & æquiangulũ, vt mox ostẽdemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad singulas rectas Mπ, YZ, NR, IL, ξO. KP; bina ipsi $\beta\theta\kappa$, similia, & æqualia construantur; (Ita enim ad Mπ, duo huiusmodi triangula vides $\beta\theta\kappa$, $\delta\theta\kappa$,) & ipsorũ beneficio duodecim pentagona ipsi β4$\theta\kappa$9, similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in sex rectis lineis Mπ, YZ, NR, IL. ξO, KP, bini nimirum in singulis, octo vero reliqui in octo semidiametris cubi consistunt, nempe in punctis, quæ ipsas extrema ac media ratione diuidunt, qualia sunt puncta 4. & 9. in semidiametris Aα, & Hα, secundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inscriptum esse dicetur cubo huiusmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie , cum non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel deniq; in planis cubi constituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo vero in pũctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

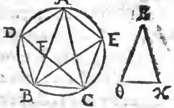
[a] 4. pri.



LEM-

LEMMA.

QVOD autem triangulum βθκ. cuius basis θκ. maius segmentum existat vtriusque lateris βθ, βκ, extrema ac media ratione diuisi, simile sit illi, quod Euclides *construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulũ Isosceles ABC, quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diuisisq; angulis ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, vt propos. 11. lib. 4. tradidimus, secentque se mutuo rectæ AB, CD, in F.* [a] *Quoniam ergo AB, in F, secatur extrema ac media ratione, maiusque eius segmentũ est AF, æquale lateri BC:* [b] *Erit vt A B, tota ad maius suum segmentum B C, ita β θ, tota ad maius suum segmentum θκ; Eodemque modo, vt tota AC, ad maius segmentum CB, ita βκ, tota ad maius segmentum κ θ: Est autem quoque vt AB, ad AC, ita βθ, ad βκ, vtrobique enim est proportio æqualitatis. Triangula igitur βθκ, A B C, proportionalia habẽtia latera, æquiangula sunt, æqualesq; erũt anguli θ, B; Item κ, C, & β, A; propterea que vterq; angulorum θ, κ, duplus erit anguli β; & triangula βθκ, ABC, similia.*



a 8. tertijdec.
b 2. quartidecimi.

PENTAGONVM *vero β 4 θ κ 9, æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostẽdemus. Describatur circa triangulũ βθκ, circulus*



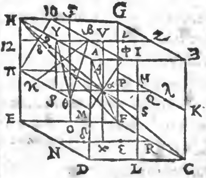
β A θ κ B; qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex iis, quae ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonũ aequiangulũ esse. Si vero nõ incedat per pũcta 4, & 9. Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinã propos. 11. lib. 4. pentagonum aequilaterum & aequiangulum β A ϑ κ B. Quoniam igitur tam rectae Aθ, AC, quã rectae 4ϑ, 4β, aequales sunt rectae θκ, cũ & β4ϑκ9, & β A θ κ B, pentagonum sit aequilaterum; Erunt tam duae rectae θ A, ϑ 4, quam duae C A, 4 C aequales. quod fieri non posse demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo βθκ, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β4θκ9, aequiangulum est.

SCHOLIVM.

EX his colligere licebit sequentes propositiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.



a33.pri
b29.pri
c47.pri

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri C ε, intelligaturque coniuncta recta γ ε, a aequalis existens & parallela lateri cubi VX, quod & V γ, X ε, aequales sint, & parallela. Quoniam igitur angulus β V X, rectus est; b rectus quoque erit angulus β γ ε, ad γ, constitutus, c ac proinde quadratum diame-

tri βε, æquale erit quadratis laterum ϛγ, γε, nempe Dodecaedri, & cubi.

II.

SI latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, minus ſegmentum latus eſt dodecaedri in cubo deſcripti: Maius vero ſegmentū latus cubi in hoc dodecaedro deſcripti.

IN eadem enim prima figura, a cum ſit vt ΥΧ, ad βV, ita ΥZ, dupla ipſius ΥV, ad βγ, duplam ipſius ϛV; Sit autem ϛV, minus ſegmentum ipſius ΥV, ſectæ extrema ac media ratione. Erit & ϛγ, minus ſegmentum lateris cubi ΥZ, ſecti extrema ac media ratione; compoſita vero ex Υβ, γZ, hoc eſt, recta ϛκ, (quæ dupla fuit oſtenſa ipſius Υϛ, ideoque compoſita ex Υϛ, γZ, æqualis) maius ſegmentum. Conſtat autem ex conſtructione ϛγ, eſſe latus Dodecaedri, b & ϛκ, ſeu ϛθ, eſſe latus cubi in dicto Dodecaedro deſcripti, cum ſubtendat angulum pentagoni β9κ, vel β4θ. a 15. quin b 8. quintidec.

III.

LATVS cubi æquale eſt duobus lateribus; Dodecaedri videlicet in ipſo deſcripti, & Dodecaedri circa eundē cubū deſcripti.

NAM in prima rurſus figura, latus cubi ΥZ, componitur ex latere Dodecaedri βγ, in ipſo deſcripti, & ex recta compoſita ex Υβ, γZ, quam conſtat eſſe latus Dodecaedri eidem cubo circumſcripti. Cum enim ΥZ, cubi latus ſubtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 8 propoſ. huius lib. c Sit autem latus illius pentagoni maius ſegmentum lateris ΥZ, ſecti extrema ac media ratione: Erit βθ, exiſtens quoque maius ſegmentum eiuſdem lateris ΥZ. & æqualis duabus Υβ, γZ, ſimul, vt iam demon- c 8. tertijdec.

strauimus, latus Dodecaedri cubo lateris YZ, circumscripti.

IIII.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IN prima enim figura recta connectens puncta β, δ, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θκ, oppositi, [a] æqualis est recta VX, (quod & βV, δX, æquales sint, & parallelæ) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

a 33. pri

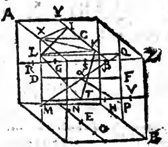
PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrum describere.

CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, per cuius basium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquam inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, K; L, M; N, O; P, Q; R, S; T, V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R, cum L, M, I, & N, &c. vt constituantur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora vero octo eiusdē cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectæ XC, XI, XK. Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia sunt lateribus XC, CK trianguli XCK; [b] & anguli contenti, recti, quod XC, parallela sit ipsi AY; [c] Erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per defin. 4. lib 11. recta quoque erit ad lineas XI, XK; Ac propterea, cum latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia sint lateribus LX XK, trianguli LXK, & anguli contenti, recti; [d] æquales erunt bases LI, LK. Rursus [e] quoniam quadratum rect:

b 29. pri
c 4. pri.
d 4. pri.
e 47. pri

LI, æquale est quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum vero rectæ XI, quadratis rectarum XC, CI, est æquale: Aequale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale est tribus quadratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ CI, (aCum enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ CI, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiusdem quadrati rectæ CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum est quoque quadrati rectæ CI; Ac propterea, cũ eiusdem quadrati rectæ CI, quadruplum sit quadratum rectæ KI, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequalia erunt quadrata rectarum LI, IK, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Aequilaterum igitur est triangulum IKL, lateri cubi AG, substratum. a 4. tertijdec.



NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia sint. Quoniam vero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo KTL, latus KL, commune est triangulo IKL; & latus KT, triãgulo TVK; & latus TL, triãgulo LMT; perspicuũ est, ea quoq; esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cum eius anguli oẽs duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propositiones sequentes.

I.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri, & cu bi Icoſaedrum ambientis.

a 33. pri b 47. pri *DVCTA enim recta LQ. [a] quæ lateri cubi DF, parallela eſt, & æqualis, quod & DL, FQ, parallela ſint. & æquales; [b] manifeſtum eſt, quadratum diametri QM, æquale eſſe quadratis rectarum LM, lateris Icoſaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icoſaedrum deſcriptum eſt, [c] cum angulus MLQ ſit rectus, quod & LDF, rectus ſit.* c 29. pri

I I.

BIFARIAE ſectiones ſex oppoſitorum laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſe ſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecantibus.

NAM huiuſmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cum coniungant centra baſium cubi oppoſitarum, æquales ſunt lateribus cubi, ſeſeque per coroll. propoſ. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in cẽtro cubi, quod ſit α, diuidunt. Quod quidem & centrum eſſe Icoſaedri, ita oſtendetur, ducta recta αP. Quoniã latera αF. FQ, trianguli αFQ, æqualia ſunt lateribus αF, FP, trianguli αFP, anguloſque comprehendunt rectos, [d] æquales erunt rectæ αQ, αP. Eademque ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icoſaedri prodeuntes. Igitur α, centrum eſt Icoſaedri. d 4. pri.

I I I.

SI latus cubi extrema ac media ratione ſecetur, maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in dicto cubo deſcripti.

e 15. q n f 2. quartidec. *CVM enim CI, ſit maius ſegmentum rectæ CY; [e] ſitque vt CI, ad CY, ita KI, dupla ipſius CI, ad βY, duplam ipſius CY: [f] erit quoque KI, latus Icoſaedri, ſegmentum maius lateri cubi βY. Si enim alia recta, quam KI, eſſet maius ſegmẽtum rectæ βY, eſſet βY, ad illam rectam, vt CY, ad CI, hoc eſt, vt βY, ad KI, diuerſum ab illa recta, quod eſt abſurdum.*

ICO-

IIII.

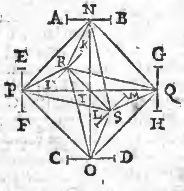
ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

SI enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectuntur, fient duo triangula inter se æqualia, angulosque alternos habentia æquales ex 4. propos. lib. 1. quæ quidem in centro conueniunt: Quare quælibet latera opposita parallela erunt; a Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela. a 15. undecimi.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icosaedro Octaedrum describere.

EXPONANTVR dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita, AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales se se in centro T, bifariã, & ad angulos rectos secãtes, per ea, quæ in scholio propos. præcedentis ostensa sunt; ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS, OQ; PR, PS; QR, QS, constituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN; RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS; trianguli TNS, æqualia sunt lateribus TN, TP, triãguli TNP, (cum sint rectarum æqualium dimidia) angulosque continent rectos, vt dictũ est; b Aequales erunt bases NS, NP: Eodemq; modo reliquę omnes lineę æquales erunt & hisce duabus, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt, & inter se æqualia; Ideoque Octaedrum constituunt. Quod in Icosaedro descri- b 4. pr.



ptum eſt, cum eius anguli reſideant in bifariis ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum. In dato itaque Icoſaedro Octaedrũ deſcripſimus. Quod faciendũ erat.

COROLLARIVM.

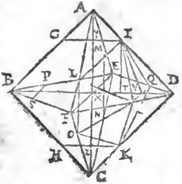
SEQVITVR hinc, idem eſſe centrum Icoſaedri, & Octaedri in eo deſcripti. Quoniam ſcilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icoſaedri incedentes, diametri ſunt Octaedri NPOQRS, ſibi inſcripti. Quare T, centrum Icoſaedri, vbi ſe interſecant, centrum quoque eſt Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

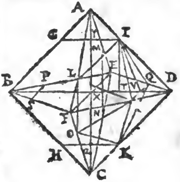
IN dato Octaedro Icoſaedrum deſcribere.

DATVM Octaedrum, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, ſit ABCDEF. Cum a quolibet angulo quatuor latera exeant, ſumantur a ſingulis bina non proxima, ſed ſibi e regione reſpondentia, hoc eſt, quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppoſitos cadunt, ſumendo ſemper bina iuxta angulos oppoſitos eiuſdem quadrati, qualia ſunt BA, BC; DA, DC, iuxta angulos oppoſitos B, D, quadrati ABCD; AF, AE; CE, CF, iuxta angulos oppoſitos A, C, quadrati AECF: (Nam a quolibet angulo ſumenda ſunt tantum duo latera; at vero latera AB, AD; CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eoſdem angulos A, C, iam ſumpta fuere,) EB, ED; FD, FB, iuxta angulos oppoſitos E, F, quadrati EBFD; (Nam latera EA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eoſdem angulos E, F, iam accepta ſunt,) quæ omnia ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora ſegmenta ſint prope angulos, a quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S. & a ſingulis ad quinque proximas ſectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & ſic de cæteris, quamuis non omnes ductæ ſint in figura, ad euitandam linearum confuſionem. Quæ autem ſint hæc quinque puncta proxima, pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum

acce-



acceptum est, pyramidem constituunt; alia autem duo sunt in duobus lateribus duorum triangulorum octaedri, quæ habent commune illud latus, in quo punctum acceptum est. Vt quia punctum acceptum est R, in latere DF, quod cum tribus DE, DA, DC, pyramidem cõstituit in vertice D, est cõmune triangulis octaedri DFA, DFC; propterea ex R, ad quinque puncta horum quinque laterum ductæ sunt lineæ rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, se se in centro X. secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quarum AC, BD, secant rectas GI, RQ, in Y, & V; connectaturque recta IV, agaturque IT, parallela ipsi YX. Quoniam ergo latera DQ, DI, triãguli DQI, æqualia sunt lateribus DR, DI, triãguli DRI; (Sũt n. DQ, DR, minora segméta rectarũ æqualium DE, DF,) & angulos cõprehendunt æquales, nẽpe triangulorum Octaedri ADE, ADF; a Erunt bases IQ, IR, æquales. Deinde cũ sit, a 4.pri.
b vt BG, ad GA, ita DI, ad IA; c erit GI, rectæ BD, paralle- b 2.
la. Eademq; ratione QR. ipsi EF, parallela; d Ac proinde quarti-
vt DI, ad IA, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, secta erit in decimi.
Y, extrema ac media rõne. Rursus quia est vt AX, ad XD, c 2.sex.
ita AY, ad YI, (quod triangulum AYI, simile sit triangulo d 4.sex.
AXD, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autem AX, ipsi XD, æqualis; Erit & AY, ipsi YI, æqualis. Quare YI, minus segmentum est rectæ XA. Non aliter ostendemus AY, ipsi YG, esse æqualem; ideoque GI, rectam, bifariam in Y, similiterque QR, in V, secari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia sint lateribus DQ, DR, trianguli DQR, (nimirum minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosque comprehendant rectos; nempe quadratorum ABCD, DEBF; e Aequales erũt e 4.pri.
bases GI, QR. Eadem ratione his æquales ostendẽtur re-



ctæ HK,PS,MN,LO, quæ nimirum ſubtendunt reliquos quadratorum ABCD,DEBF, AECF, angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos,complectunturque duo ſegmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus ſegmentum ipſius XA, oſtenſum,maius eſt ſegmentum maioris ſegmenti XY, diuiſi extrema ac media ratione, vt demonſtrauimus ad propoſ.5.lib 13. Eſt autem XY,rectæ XV,æqualis,(cum ambæ ſint maiora ſegmenta æqualium rectarum XA, XD,)

a 34.pri a & YI,rectæ XT; erit XT, maius ſegmentum ipſius XV, & idcirco TV,ſegmentum minus eiuſdem XV. Quare

b 34. pri quadrata rectarum XV,totius,hoc eſt,ipſius IT, (b cum & recta IT,æqualis ſit ipſi XY)& TV, minoris ſegmenti,

c 4.tertijdec. c tripla ſunt quadrati rectæ XT,maioris ſegmenti;Atque adeo quadratum rectæ IV, d æquale exiſtens quadratis

d 47.pri rectarum IT, TV, triplum eſt eiuſdẽ quadrati rectæ XT, hoc eſt,rectæ RV,quæ æqualis eſt ipſi XT, ſeu ipſi YI, ex demonſtratis,cum RV, YI, dimidia ſint æqualium rectarum RQ,GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipſi quadrato rectæ IV;erunt quadrata rectarum IV,VR,quadrupla quadrati rectæ RV: e At quadratis rectarum IV, VR,

e 47.pri f 8.pri. æquale eſt quadratũ rectæ IR, f quod anguli IVR, IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV,VR;IV,VQ,& ſubtenſi baſibus æqualibus IR,IQ,æquales ſint,ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR,quadruplum eſt quadrati rectæ VR; Ac propterea cum eiuſdem quadrati rectæ VR,quadruplum quoque ſit per ſcholium propoſ.4.lib. 2.quadratum rectæ QR; Aequalia erunt quadrata rectarum IR;QR,ideoque & rectæ ipſæ æquales: Erat autem IQ,ipſi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum eſt IQR. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triangula ſimilem ſitum cum IQR, habentia, nempe KQR; GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OHK; RLO, SLO; PMN,

QMN;atque adeo triangulo IQR,æqualia,cum latera omnium ſint æqualia inter ſe. quod tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum vnum latus ſubtendat angulum rectũ quadrati comprehenſum duobus ſegmentis minoribus laterum octaedri;duo vero reliqua ſubtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos ſingulos duobus ſegmentis laterũ Octaedri,maiore & minore; Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum,æqualia; ac propterea & ipſa triangula æqualia, per corollarium propoſitionis 8.lib.1.Vt in triangulis IQR, GIL, latera RQ,GI,ſubtendentia angulos rectos QDR,GAI,quadratorum DEBF, ABCD,compre henſos minoribus ſegmentis DQ,DR;AG, AI, æqualia ſuntEodem modo latera IQ, IL, æqualia erunt, cum ſubtendant angulos æquales IDQ,IAL,triãgulorum æquilaterorum ADE,ADF,quorum ille cõtinetur ſegmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore;hic vero ſegmentis AL, AI, maiore & minore quoque.Nõ ſecus latera IR,GL, ęqualia erũt. Aequalia igitur ſunt triangula IQR,GIL, per corollariũ propoſ.8.lib.1.Atqui IQR,oſtenſum eſt eſſe æquilaterũ; Ergo & GIL,æquilaterum eſt.Eademque eſt ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula ſupponũntur ſex angulis Octaedri, bina videlicet ſingulis. Ex his conſequitur,reliqua octo triangula octo baſiqus Octaedri impoſita,videlicet GMP,in AEB; HNP, in BEC;KNQ,in CED;IMQ in AED;GLS,in AFB; HOS,in BFC;KOR,in CFD;ILR,in AFD, æquilatera quoque eſſe,& prædictis æqualia, cum horum latera cum illorum lateribus communia ſint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in ſingulis ſectionibus,laterum octaedri conueniunt ad conſtitutionem anguli ſolidi,(vt vides in quinque RQI,RIL,RLO, ROK, RKQ, ſolidum angulum R,componentibus.) Icoſaedrum componunt Octaedro inſcriptum,cum Icoſaedri duodecim anguli, duodecim ſectiones laterum Octaedri poſſideant. In dato itaque Octaedro,&c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM. I.

COLLIGITVR ex demonstratis, si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmentũ, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cum enim in triangulo æquilatero ADE, maius segmentum lateris AD, sit DI, & DQ, minus lateris DE; Sit autem recta IQ, ostensa
a 47. pri æqualis rectæ G I, quæ duplum potest minoris segmenti AI, a cum quadratum rectæ G I, æquale sit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: Perspicuum est, & rectam I Q, duplum posse eiusdem segmenti minoris AI.

COROLLARIVM. II.

RVRSVS fit, cum octo Icosaedri bases collocatæ sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namque Octaedri superioris triangulum AED, in quo collocatum est triangulum Icosaedri IMQ, sitque C, centrum trianguli A E D, ex quo rectæ educantur CA, CE, CD: CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, A M, trianguli CAM, æqualia sunt lateribus CE, EQ, trianguli C E Q, (quod hæc latera sint ex centro, & maiora segmenta æqualium rectarum) angulosque comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in scholio propos. 12. lib. 13. ostendimus: Erunt bases C M, CQ, æquales. Non secus demonstrabimus CI, æqualem esse lineis CM, C Q. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.



COROLLARIVM III.

NON difficile est denique ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunque duos angulos Icosaedri, nimirum rectis X G, X O, ad angulos G, & O: cum latera XA, AG, trianguli XAG, æqualia sint lateribus X F, F O, trianguli XFO, (Nam XA, XF, semidiametri sunt Octaedri, & AG, FO, segmenta minora laterum æqualium Octaedri sectorum extrema ac media ratione) angulosque complectantur æquales, semirectos videlicet: (cum AC, EF, diametri sint quadratorum ABCD, EAFC: ac proinde, per demonstrata in scholio propos. 34. lib. 1. angulos
b 4. pri. quadratorum bifariam secent.) b Aequales erunt & bases XG, XO. Eodemque argumento ostendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icosaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

[a] INSCRIBATUR dato Octaedro Icosaedrum; [b] & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponũtur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non proprie, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

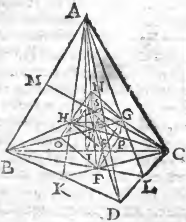
a 16. quintidecimi.
b 5. quintidecimi.

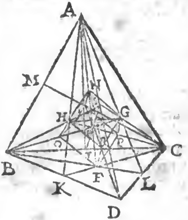
PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data pyramide cubum describere.

DETUR pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectæ educantur AEF, BEG, CEH, DEI, [c] quæ cadent in centra basiũ oppositarũ F, G, H, I, eruntq; perpendiculares ad easdem bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc cẽtra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, secãtes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bifariã, & ad angulos rectos, ex schol. prop. 12. lib. 13. in pũctis K, L, M, S,

c 15. quartidecimi.

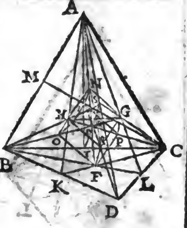




T. Secentur quoque rectæ ex solidis angulis per centrum E, demissæ A F, B G, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorũ quodlibet cum tribus proximis centris basium (centris, inquam, basium ipsam lineã, in qua punctum est, circũstantium, ita vt relinquatur centrum illius basis, in quam perpendicularis cadit.) rectis lineis coniungantur, vt N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico solidum NF, contentum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubum esse, Cum enim latera AF, FK, trianguli A F K, æqualia sint lateribus AF, FL, trianguli AFL, (quod FK, FL, cum perpendiculares sint ad BD, CD, ex centro F, ductæ ostendant æquales distantias rectarum æqualium BD, CD, a centro F,) angulosque contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. [a] Aequales erunt & bases AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rursus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia sunt lateribus AN, AG, trianguli ANG, (sunt. n. AH, AG, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABD, ACD,) angulos item comprehendunt æquales, vt demonstrauimus; [b] Aequales erunt bases N H, NG Haud secus ostendentur æquales rectæ QG, QH, si rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; vt perspicuum est. Si enim recta ducatur F T, cum latera AF, FT, æqualia sint lateribus AF, FK. (Sunt namque FT, FK, distantiæ rectarum æqualium BC, BD, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, æqualia sint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABC, ABD;) angulosque contineant æquales; [c] Aequa-

a 4. pri.
b 4. pri.
c 4. pri.

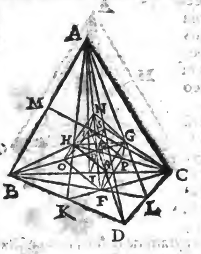
les



les erunt bases NI, NH, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse atque rectangula, vt tandẽ quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum NF.

ASSVMATVR quadrilaterũ NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, opposita sunt, hoc ẽ, non coeuntia in in aliquo pũcto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST, erit ea diameter octaedri in pyramide descripti, vt cõstat ex figura propos. 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa sint latera opposita, siue non coeuntia BC, AD. Quocirca cum idem sit centrum pyramidis & Octaedri in ipsa descripti, vt mox demonstrabimus, transibit ST, per E, centrum pyramidis, ęqualesque erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, per scholium propos. 12. lib. 13. a erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter secãtur, b atque idcirco HG, parallela est lateri BC, secatque latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars est trianguli BSC,) proportionaliter; ideoque & RS, tertia pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE, Rursus c quia DI, perpendicularis est ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4. recta DI, ideoque eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ talium partium erit 1. atque idcirco EQ tertia pars erit ipsius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipsius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter secentur,

a 18. quarti-decimi.
b 2. sex.
c 15. quarti-decimi.



a 2. sex. a recta NQ, parallela erit lateri AD, secabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidem pars est triãguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum EQ, sit tertia pars ipsius DE; tertia pars erit ER, ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiusdem SE. Quoniam igitur vtraque HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur SE, a rectis HG, NQ; Atque idcirco & ipsæ HG, NQ, in

b 2. vndecimi. eodem sese puncto intersecabunt. b Quare in eodem sunt plano, propterea que & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodẽ cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ; Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

CVM ostensa sit HG, ipsi BC, parallela, atque adeo triangulum SHG, simile triangulo SBC, ex coroll. propos.

c 2. sex. 4. lib. 6. c Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad, SB, ita HG, ad BC: Est autem SH, tertia pars ipsius SB: Igitur & HG, tertia pars erit lateris BC. Haud secus ostendemus NQ, tertiam esse partem lateris AD. Cũ ergo latera BC, AD, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum subtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH,

d 8. pri. QH; d Aequales erunt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cum ipsi sint quatuor rectis æquales, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. recti erunt, ideoque quadratum erit NQ. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent, qui ideo pyramidi dicetur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor basium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in bi-

fariis

fariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat.

ALITER. In data pyramide describatur octaedrum, & in hoc octaedro cubus; factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex propos. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus; fit, vt quatuor anguli cubi resideant in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonstratione dictum est. Rursus quia reliquæ quatuor bases octaedri parallelæ sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. ([a] cum enim rectæ E G, E H, parallelæ sint rectis BC, BD; [b] erunt quoque triangula E G H, B C D, per illas rectas ducta, inter se parallela, & sic de cæteris.) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoque ad illas quatuor reliquas bases octaedri perpendiculares, ex scholio propos. 14. lib. 11. Quare cum prædictæ bases abscindant ex pyramide pyramides similes toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum basium, quemadmodũ & in centra basium totius pyramidis cadunt. [c] Et quia dicta quatuor bases octaedri diuidunt illas perpẽdiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc est, bifariam; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi statuantur in medijs punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonstratio docuit. Constat ergo cubum in pyramide esse descriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 2. sex.
b 15. vndecimi.
c 17. vndecimi

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti: Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per E, centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIVM II.

INFERTVR quoque rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim E R, ex E, centro cubi, in R, centrum basis GNHQ, ducta dimidium sit lateris cubi, vt constat: Recta RS, dupla ipsius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, ostensa sit tertia pars ipsius S T; perspicuum est, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis AD, BC, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi RS.

LEMMA.

IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti, ita demõstrabimus. Sit primũ pyramis ABCD, cuius oĩa sex latera bifariã secēturin E, F, G, H, I, K; & ex L, cētro Pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, *quæ in cētra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. Cõiunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniam latera LM, ME, trianguli LM E, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF, (cum enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi à cētro L, per lēma 2. propos. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distãtiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, distantiæ rectarum æqualium AB, BD, a centris M, & N, circulorum æqualiũ) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11.*[a] *Aequales erunt rectæ LE, LF. Eademq;*

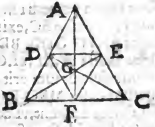


a 4. pri.

ratione

ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, k, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea descripti.

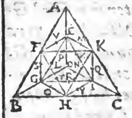
SIT deinde in base pyramidis ABC, basis octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum triãguli ABC, a quo ad angulos vtriusque basis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia sunt, angulosque continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualiũ trianguli æquilateri; a erunt & bases GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli DEF. quod est propositum. a 4. sex.



PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describere.

DATAE Pyramidi ABCD, b inscribatur octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos opposi- b 2. quartidecimi.



tos quadratorũ octaedri cadẽtia, vt in propoſ. 16. huius lib. diximus, qualia ſunt EG, EK; HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam ſi quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q &c. deſcriptum erit Icoſaedrum in dicto octaedro, vt conſtat ex propoſ. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis ſectionibus duodecim laterũ octaedri. Cum ergo hæc ipſa latera octaedri in planis baſium Pyramidis ſint ducta; manifeſtum eſt, duodecim angulos Icoſaedri in planis baſiũ pyramidis conſtitui, ternos ſcilicet in ſingulis, quod & terna latera octaedri in ſingulis baſibus pyramidis ducta ſint. Nã in baſi ABC, exiſtunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE: In BDC, latera GH, HI, IG: In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icoſaedrum in pyramide deſcriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor baſes MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor baſibus Pyramidis exiſtunt, vt conſtat. In data igitur Pyramide Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data pyramide Dodecaedrum deſcribere.

a 19 quintidec. PYRAMIDI datæ [a] inſcribatur Icoſaedrum, [b] & in b 5. quintidec. hoc Dodecaedrũ habens viginti ſuos angulos in centris viginti baſium Icoſaedri: Factumque erit quod iubetur. Cum enim quatuor baſes Icoſaedri exiſtant in quatuor baſibus pyramidis, vt in præcedenti propoſ. diximus: cõſiſtent quatuor anguli Dodecaedri dicto icoſaedro inſcripti in quatuor baſibus pyramidis, nempe in earũ centris. Sunt enim dictæ quatuor baſes Icoſaedri quatuor baſibus Pyramidis concentricæ, vt conſtat ex 2. coroll. pro- c 8. quintidec. poſ. 16. huius lib. Deinde [c] quia cubus Dodecaedro inſcri-

ptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, [a] quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur: Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiamsi non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. quod faciendum erat.

a 18. quintidecimi.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

x iii.

IN dato solido regulari sphæram describere.

EX centro sphæræ datum solidum complectentis ad singulas bases perpẽdiculares demittãtur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter a centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphæra, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies conuexa singulas bases in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quodlibet quinque solidorũ regularium in quatuor reliquis inscribatur, vt sint in vniuersũ viginti inscriptiones; vnũ duntaxat Dodecaedrũ improprie describitur in cubo, octaedro, atque pyramide, vt perspicuum est ex propos. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide describitur, vt ex propos. 19. huius lib. est manifestum. Nam, vt proprie solidum aliquod in

solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti constitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, vt defin. 31. lib. 11. exposuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.

CAETERVM inter omnia quinque solida regularia, vnū octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipit inscripta: a In octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim suos angulos in duodecim pūctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde b Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem octaedro inscriptum est, vt constat ex propos. 17. huius lib. Post hac in Dodecaedro c describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basiū octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in octaedro descriptus est. d Denique in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.

a 16. quintidecimi. b 5. quintidec. c 8. quintidec. d 1. quintidec.

NEQVE vero prætereūdum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphæra comprehendi. e Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, f conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido cōstat, sphæram Dodecaedro circumscriptam complecti quoque cubum atque pyramidem, cum sphæra illius superficies per horum solidorum angulos incedat.

e 1. quintidec. f 8 quintidec.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, octaedro & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: in centris quidem basiū Icosaedri propos. 5. 11. & 12. In cētris vero basium octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib propositionibus omnes delineationes inscriptionesve quinque solidorum regula-

rium, unius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 3.18.19.20. In octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6.4. 16.17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1.3.14.13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15.11.5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum propos. 10.9.8.7. descripsimus. At vero posteriori vnica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM.

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, a Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinque corporibus

LIBER TERTIVS.

QVEMADMODVM *libro 14. traditæ ſunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem libro 15. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hæc quinque corporum regularium, ſi liber hic decimusſextus non adiungatur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur,

& in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, deſcripti ſit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius ſegmentum ad EB, minus. Cũ enim, vt in ſcholio vltimæ propoſ. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cu-



busque in illo deſcriptus, eadem comprehendantur ſphæra; Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. erit AE, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit EB, minus ſegmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumſcripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inſcripti, vt AE, maius ſegmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatã lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrũ lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris ſegmenti AE, ad minus ſegmentum EB. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri,& æquianguli in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppositum CD, perpendicularis demittatur AF. Dico AF, a recta BE, subtendente angulũ A, secari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, quę secet BE, in H; quoniam BE, recta lateri CD, ex scholio propos.8.lib.13. est parallela; a secabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: b Atqui A D, in H, secta est extrema ac media ratione, estque maius segmentum DH. Igitur & AF, in G, similiter erit secta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonstrandum.



a 2. sex.
b 18. ter tydec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac

media

media ratione,& latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

TRIANGVLVM pyramidis ſit ABC, cuius latera ſecentur bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rurſum ſectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, conſtituentes GHI, triangulum Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli ABC, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis BK, CL, AM. Dico has rectas ſuis ſectionibus producere triangulum Icoſaedri GHI, hoc eſt, rectam BK, tranſire per puncta G, I; & rectam CL, per



puncta H, I; & rectam AM, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipſi BC, parallela; erit triãgulum FHO, triangulo FEC, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC, æquilaterum ſit, quippe quod ſimile ſit triangulo ABC, per idem coroll. Quare HO, recta æqualis eſt rectæ FH, maiori ſegmento rectæ FE, ſeu DF, ipſi æqualis: (Eſt enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis ſcilicet æqualium laterum eiuſdem trianguli comprehenſos; [a] ideoque æqualia ſint.) [b] Eſt autem & NH, æqualis toti DF, in parallelogrammo DH, [c] propterea quod FH, DF, parallelæ ſunt rectis AB, BC, ſeu NO. Igitur recta NO, compoſita ex NH, tota, & HO, maiori ſegmento, [d] ſecta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cũ tres parallelæ BC, NO, DF, ſimiliter ſint ſectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM, ex ijs, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eaſdem ſimiliter; liquido conſtat, ipſam AM, tranſire per puncta G, H. Haud ſecus oſtendemus BK, per puncta G, I; & CL, per puncta H, I, tranſire, ſi per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB; Atque idcirco rectæ

a 4. pri
b 34. pr
c 2. ſext
d 5. ter- tijdec.

BK, CL, AM. suis sectionibus producent triangulum Icosaedri GHI.

AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela: Quoniam igitur AF, æqualis est rectæ DF, seu rectæ FE, cuius maius segmentum fuit FH, hoc est, FO, illi æqualis; Erit quoque FO, maius segmentũ rectæ AF; [a] ac proinde tota AO, secta in F, extrema ac media ratione: [b] Est autẽ vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO; & vt AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, suntque maiora segmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, segmenta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia vero est [c] vt AQ, maius segmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius segmentum; Et est AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus segmentum erit lateris AB, maiusq. reliqua BP; ac propterea recta PQ, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, secabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione, atq; adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam vero singula latera trianguli PQR, cum subtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, [d] æqualia inter se sunt; erit triangulum PQR, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri GHI: (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela sit lateri CL; secabuntur PQ, LC, in easdem rationes, ex ijs, quæ ad propos. 4. lib. 6. demonstrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulũ ACL, in quo FH, parallela est lateri AL, [e] secans proportionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ, bifariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP) Ac propterea triangulum Icosaedri GHI, inscriptũ est triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis ex-

a 5. tertijdecimi.
b 2. sexti.
c 2. quartidec.
d 4. pri.
e 2. sexti.

dis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G,H,I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, vt constat ex propos. 16. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis DEF, descripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, est æquale, recta FS, parallela rectæ AM, secans MC, HO, in S, & T. a Cum igitur MC, bifariam secetur in S, ob triangulum AMC; b sitque MS, ipsi GF, æqualis, ob parallelogrammũ GS: Erit & SC, æqualis eidem GF, minori segmento rectæ DF: Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales sint: erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori segmento æqualis: Ideoque EC, in S, secta erit extrema ac media ratione. Deinde c quia FE, FS, similiter secantur: secatur autem FE, extrema ac media ratione, secabitur & FS: in T, extrema ac media ratione; maiusque segmentum erit FT, recta d æqualis existens lateri Icosaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.



a 2. sex.
b 34. pri
c 2. sex.
d 34. pri

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit ABC, cuius latera extrema ac media ratione secentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GHI, basim Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo æquilatero PQR,



cuius anguli latera trianguli A B C, secent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipsa latera PQ, QR, RP, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in propos. præcedenti demonstratum est. Dico AP, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri HI. Cum enim P Q, dupla sit potentia minoris segmenti AP, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 15. quadrupla vero potentia rectæ HI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod P Q, recta dupla sit rectæ PG, hoc est, sibi æqualis HI, ob parallelogrammum P H; Erit PQ potentia 4, & AP, 2 & HI, 1. Quamobrem AP, dupla erit potentia rectæ H I. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in pyramide descripti, esse Apotomen. a Cum enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis: si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, b cum diametro potentia sit commensurabile. c Quare minus segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apotome erit: Atque adeo d cum minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentia sit commensurabile: (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri.) Erit & latus Icosaedri, ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.

a 13. tertijdec.
b 6. dec.
c 6. tertijdec.
d 6. dec.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus vero Pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Sit au-

tem

em quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, vt liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cum ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt constat ex coroll. propos. 4. lib. 6. a Nam cum sit parallela tertio lateri, auferet triãgulum æquilaterum, &c. Perspicuum est latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti. a 2. sex.

DENIQVE b quia diameter sphæræ, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cum diameter octaedri coniungat centra basium oppositarum, vt in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum. b 14. tertijdec.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

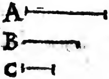
LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quę potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; c existat denique latus cubi dimidium potentia lateris pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius, segmentum rectæ esse quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. c 5. sexti decimi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo deſcribatur & Icoſaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icoſäedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icoſaedri in eo deſcripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo deſcripti C. Dico B, latus Icoſaedri medio loco eſſe proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex iis, quæ in propoſ. 14. lib. 15. demonſtrata ſunt, B, latus Icoſaedri maius ſegmentum ſit lateris cubi A; & C latus Dodecaedri, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 13. eiuſdem lib. oſtendimus, minus ſegmentum ſit eiuſdem lateris cubi: Planum ſit, ita eſſe A, totam ad B, maius ſegmentum, vt B, maius ſegmentum ad C, minus. Si in cubo itaque deſcribatur & Icoſaedrum, &c. Quod oſtendendum erat.



THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti.

CVM enim per ea, quæ propoſ. 18. lib. 15. ſunt demonſtrata, latus Pyramidis longitudine triplum ſit diametri baſis cubi in ea deſcripti; (oſtenſum enim eſt ibi, GH, diametrum baſis cubi inſcripti tertiam eſſe partẽ lateris Py-
a 20. sex. ramidis BC,) [a]Et quadrata proportionem habeant laterũ duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplũ quadrati diametri baſis cubi in ea deſcripti, cũ noncupla proportio ſit triplæ duplicata, vt in his numeris 1.3.9. apparet. Quare cũ quadratum diametri baſis cubi duplũ ſit ipſius baſis cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. fit, vt ſi ponatur baſis cubi, hoc eſt, quadratum lateris cubi 1: quadratũ eiuſdem baſis diametri ſit 2. quadratum lateris pyramidis

18.Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud dodecaedrum inscribitur, vt docuimus in scholio propos. vlt. lib. 15.[a] Erit latus pyramidis potētia octodecuplū lateris cubi sibi, & Dodecaedro inscripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione secti maius segmentū est, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirū cubus est descriptus. Igitur latus pyramidis potētia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti. Quod demonstrandum erat.

a 8. sexti decimi.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuisi.

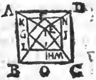
VT enim constat ex propos. 16. lib. 15. recta coniungens duas sectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentium prope minora segmenta; (qualis fuit ibi recta GI, subtendens angulum rectum GAI, minoribus segmentis AG, AI, comprehensum;) latus est Icosaedri in octaedro descripti, Quare, b cum hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris segmenti. Si in octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

b 47. pri

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT vna sex pyramidum octaedri ABCDE, cuius basis quadratũ ABCD, triangula vero ad E, verticem, ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelæ. Quod si coniungantus rectæ FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, sesquialtera est rectæ EH, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH: [a] Atqui vt EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igitur qualium partium 3. cõtinet EB, talium 2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ac propterea quadratũ lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirũ KLMN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum sit quadrati GI, sibi inscripti, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. demonstrauimus. Est enim LN, quadratum ex diametro quadrati HI, descriptum; [b] cum GI, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.



[a] 2. sexti

[b] 33. pri.

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diuisum efficit maius segmentum latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 2. propos. 13. lib. 15. inscribunturque Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidem octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, cuius maius segmen-

mentum latus est Dodecaedri octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem octaedro inscripti, cuius quadruplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt constat ex propos. 14. lib. 15. eiusque scholio: Et in bifariis sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri resident sex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15. eiusdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cum per ea, quæ ad propos. 14. lib. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti. a Atqui diameter sphæræ, seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat. a 14. tertijdec.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quã

minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ lineæ.

OSTENSVM eſt in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Minus ſegmentum lateris cubi extrema ac media ratione ſecti eſſe latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius ſegmentum, vel maioris ſegmenti ad minus, (quod tota linea, maius ſegmentum, atque minus, ſint tres rectæ continue proportionales:) liquido conſtat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipſo deſcripti eſſe quoque proportionis maioris ſegmenti ad minus duplicatam.

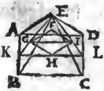
PRAETEREA, cum conſtet ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. maius ſegmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuiſi latus eſſe Dodecaedri, cui cubus inſcribitur; manifeſtum eſt eſſe vt latus Dodecaedri, hoc eſt, maius ſegmentum, ad latus cubi in ipſo deſcripti, hoc eſt, ad totam lineam extrema ac media ratione ſectam, ita minus ſegmentum ad maius. Cum enim ſit, vt tota linea ad maius ſegmentum, ita maius ſegmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, vt maius ſegmentum ad totam lineam ita ſegmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ Pyramidis.

SIT vna ſex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius baſis quadratum ABCD, triangula autẽ ad verticem E, ſint ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in octaedro deſcripti conſtituentibus, vt docuimus in propoſ. 4. lib. 15. Quoniam vero pyramis in cubo deſcripta, deſcribitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. expoſuimus;

Eſtque



Estque latus pyramidis in cubo descriptę diameter basis cubi, vt cõstat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, sesquialterũ esse lateris Pyramidis G I, Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L; ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæq; EK, EL, sesquialtere erũt rectarũ EG, EI, per coroll. propos. 18. lib. 14.[a] Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferẽs, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum EGI, simile triangulo EKL. Quare erit vt EK, ad KL, ita EG, ad GI, & permutando, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI, ideoque cum EK, sesquialtera sit ipsius EG, erit & KL, sesquialtera ipsius GI.[b] Cum ergo B C, æqualis sit ipsi KL, quod & BK, CL, æquales sint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri sesquialterum lateris Pyramidis GI, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

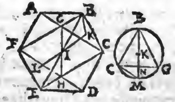
a 2. sex.

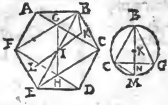
b 33. pri

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplũ quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum A B C D E F G H, cuius diameter BE, & centrum I; triangula vero opposita & parallela, per coroll. 4. propos. 14. lib. 13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum B C G, perpendicularis IK, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur K I, perpendicularis quoque erit ad planum E F H, parallelum plano BCG, per scholium propos. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in Icosaedro descriptus statuat suos angulos in centris basium Icosaedri, vt con-





ſtat ex propoſ. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitárum; Erit KL, diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, tranſiens per I, centrum Icoſaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, tranſeat, erit I, quoque centrum cubi inſcripti, ideoq; IK, IL, ſemidiametri æquales: Coniuncta autem K B, ſemidiametro circuli triangulum BCG, circumſcribentis, erit angulus BKI, rectus, ex defin. 3. lib. 11. a Ac proinde quadratum rectæ BI, æquale quadratis rectarum B K, KI. Igitur & quadratum diametri B E, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri BI, vt in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris BK, KI, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL, (b quod triplum eſt quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri Icoſaedri BE, remanet quadratum diametri circuli triangulum B C G, circumſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris Icoſaedri B C. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum B C G, circulus, extenſaque BK, vſque ad M, quæ ſecet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur B N, per centrum K, ducta perpendicularis eſt ad C G, per ea, quæ oſtẽdimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. c erit recta BC, potentia ſeſquitertia rectæ BN: Vt aũt BC, ad BN, ita eſt BM, ad BC, quod B C, ſit media proportionalis inter BM, & BN, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. d cum angulus BCM, rectus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur BM, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ B C; Ac propterea quadratum diametri BM, ſeſquitertium eſt quadrati lateris BC. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 47. pri

b 15. tertijdec.

d 12. quartidecimi.

d 31. ter

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triãgulum Icoſaedri ambientis. Oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri BE, æquale eſſe quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus ſegmentũ eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro deſcripti, a duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias ſectiones laterum oppoſitorum Dodecaedri, vt manifeſtum eſt ex propoſ. 9. lib. 15. Eſt autem rectæ dictas ſectiones coniungentis diuiſæ extrema ac media ratione minus ſegmẽtum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propoſ. 17 lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus ſegmentum eſſe eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris octaedri in eo deſcripti, cum huiuſmodi recta coniungat bifarias ſectiones laterum Dodecaedri oppoſitorum, cuius quidem minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 14. tertijdec.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.

CVM cubus & pyramis in eo deſcripta, in eodẽ Icoſaedro deſcribantur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. eademque ſphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter ſphæræ pyramidem circundantis: b Poteſt autem diameter ſphæræ ſeſquialterũ

b 13. tertijdec.

lateris

lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter circuli basim Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius lib. demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circundantis, ex coroll. propos. 15. huius lib. potest & suiipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basim Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandum.

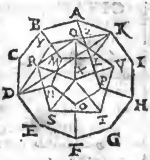
THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque extrema ac media ratione diuisæ, ad partē eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum sex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Constituta sunt igitur quinque triangula Icosaedri in Dodecaedro descripti componentia angulum solidū X, in centro pentagoni LMNOP, vt ostensum est in demonstratione propos. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem basim B M, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos secant latus BM, per coroll. a 2. propos. 10. lib. 13. conueniēt in puncto Y. Quod si subtendatur recta AL, angulo K; secabitur a perpendicularis

a 2. sextidec.

K Y, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita esse latus Dodecaedri LM, ad latus Icosaedri sibi inscripti QR, vt KZ, minus segmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter cētrum Q, & latus B M, interceptam. Subtensa enim recta DK, quæ, per demonstrata in scholio propos. 13. lib. 15. latus est cubi, in quo Dodecaedrum propositū describitur; erit L M, latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius D K, si extrema ac media ratione secetur, ex eodem scholio propos. 13. lib. 15. Quoniam vero



latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter secantur in R, & Q; (sunt enim RD, QK, semidiametri circulorū æqualium æquales; necnon & YR, YQ, distantiæ nimirū rectæ BM, a centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) [a] parallela erit QR, ipsi DK; Ideoque triangulum YRQ, triangulo YDK, simile per coroll. propos. 4. lib. 6. [b] Quam ob rem erit, vt DK, & KY, ita QR, ad QY, [c]. Vt autem DK, tota ad totam KY, ita est LM, minus segmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ, minus segmentum perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q. & latus BM, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.

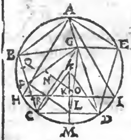
a 2. *sex.*
b 4. *sex.*
c 2. *quartidecimi.*

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum a toto latere Icosaedri sublatum; a reliqua quoque recta pars rur-

ſum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icoſaedri compoſitum circulus deſcribatur, cuius centrum F; & ſuper quinq; latera pẽtagoni quinque triangula æquilatera excitentur conſtituentia angulum ſolidum Icoſaedri G, ex ijs, quæ in propoſ. 16. lib. 13. ſunt demõſtrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inſcribatur A H I. Quoniam



igitur arcus ABC, AED, æquales ſunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cum ſint tertiæ partes eiuſdem circumferentiæ; erunt reliqui arcus H C, I D, æquales; proptereaque rectæ HI, CD, parallelæ, per ſcholium propoſ. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, [a] ſecans rectas H I, C D, bifariam in K, & L; coniunganturque rectæ F C, F D. Suſcipiantur inſuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, cẽtra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. latera oppoſita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuiſa eſt CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt conſtat ex demonſtratis in propoſ. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Denique B P, dimidium lateris Icoſaedri ſecetur in Q, extrema av media ratione; & ablato minori ſegmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem eſſe lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis a latere triãguli æquilateri HI, ſecetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione ſecta faciat maius ſegmentum æquale perpendiculari F K, per corollarium propoſitionis 2. lib. 14.) ſit autem maiori ſegmento F K, æqualis recta KM, per coroll. propoſ. 12, lib. 13. Erit ex iis, quæ de

[a] 3. ter.

monſtra-

monstrauimus ad propos.5.lib.13. maius segmentũ K M, sectum quoque in L, a minori segmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectã F L, minore dimidiæ suiipsius segmento L M. Quoniam vero iuncta PL, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABCDE, descripti, idemque centum F, habentis, ex scholio vltimo lib.4. ideoque similis illi; erunt triangula FCD, FPL, (si recta duceretur FP,) similia, per scholium propos.20.lib 6.b Quare vt FC, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad F L, ita C D, ad L P: Atqui FC, hoc est, sibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore segmento dimidii ipsius FM, nempe minore segmẽto rectæ KM, vt ostendimus. Recta igitur C D, vel sibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore segmento dimidii ipsius BC, nimirum minore segmento rectæ B P, quod fuit B Q; ideoque reliqua C Q, rectæ PL, æqualis erit. Rursus quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris N, O; (quod GN, GO, duplę sint ipsarum NP, OL, per coroll. propos. 18. lib. 14.) [a] parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. [b] Igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Est autem GP, ipsius GN, sesquialtera, per coroll. propos. 18. lib. 14. Quare & PL, hoc est, sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cum C Q. sesquialtera quoq; sit rectæ QR. (Nam qualium partium 3. est CQ, talium 1. est C R, per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR,) æqualis erit QR, ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. sex.

b 4. sex.

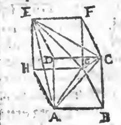
THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum esse Cum enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstent quatuor pyramides sun

datæ

datæ super quatuor bases ipsius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non resident



quatuor anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ:(Nam super basin ACE, fundatur pyramis ACED; super basin AEG, pyramis AEGH; super basin CEG, pyramis CEGF; & super basin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. defin. lib. 11. cum contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus & similibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ.) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus; (Nã exempli causa, pyramis ABCG, basim habens ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinem vero eandem, quam cubus, rectã videlicet BG, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinem habentis. a Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestũ est pyramidem A B C G, sextam partem esse cubi, proptereaque cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquã pyramidẽ æquilateram ACEG, cubo inscriptã eiusdẽ cubi tertiã esse partẽ. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.

a 32. vndecimi.

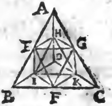
ALITER. Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. b Cubus vero triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est; perspicue colligitur, cubũ triplũ esse sibi inscriptæ pyramidis, quandoquidem hæc in eadẽ sphæra, in qua cubus, continetur.

b 32. quartidec.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri esse duplam. Cũ enim octaedrũ circumstent quatuor pyramides pyramidi ABCD, similes, vt propos. 3. lib. 15. demonstratum est, fundatæ super quatuor bases octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales sunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cum cõtineantur triangulis similibus, æqualibusque numero & magnitudine, quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propos. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nẽpe dimidia laterum æqualium eiusdẽ pyramidis ABCD, ex constructione propos. 2. lib. 15.) a Habeant autem pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpositarum, (cum octupla proportio, sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata. vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perspicue apparet) hoc est, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD; Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id est, dimidiũ pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.



a 8. *duodecimi.*

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextuplus est.

QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, vt constat ex secunda demonstratione propos.

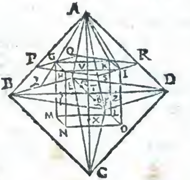
[a] 20. sextidec. [b] 21. sextidec.

3.lib.15. [a] Est autem cubus pyramidis in eo descriptæ triplus, [b] & pyramis octaedri sibi inscripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. quod erat demonstrandum.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

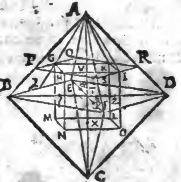
IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum. Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratú constituentes PQRS, vt in 1. propos. 4. lib. 15. est demonstratum; [c] quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholium propos. 14. lib. 11. Est autem V, cẽtrum quadrati PQRS; [d] (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. [e] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia sunt quadratis re-



[c] 15. vndecimi. [d] 17. vndecimi. [e] 47. pri

ctarum

ctarum AV, VP; AV, VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ, propterea que & rectæ ipsæ VP, VQ, æquales. Non aliter ostendemus & hisce, & inter se æquales esse rectas VR, VS. Quare V, centrum est quadrati PQRS.) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo descripti, per scholium vltimum lib. 4. Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt constat ex demonstratis in propos. 4. lib. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum esse basis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum basium transire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrũ trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipsius Gγ, per coroll. propos. 18. lib. 14. a Cum ergo plana PR, BD, parallela secent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipsius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipsius XT; Ac proinde cũ æquales AT, CT, similiter secentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: nec non VT, XT. Recta igitur VX, coniungens centra basium cubi oppositarum, bifariam secatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam secentur in T, erit T, centrum cubi; cum, per coroll. 1. propos. 15. lib. 13. rectæ centra basium cubi oppositarum, connectentes se se bifariam secent in centro. Iam vero quoniam VX, ipsius VT, dupla est; dupla autem fuit & AV, eiusdem VT; æqualis erit AV, ipsi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, Ak, AH, tertia pars est cubi, seu prismatis GO, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. cum vtriusque eadem sit basis GI, & altitudines æquales AV, VX: b Est autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & basis PQRS, dupla sit

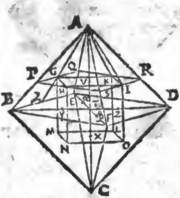


a 17. vndecimi.

b 6. vndecimi.

basis GHIK, illi inscriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, similes existentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius.) a proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus AB, lateris A P, sesquialterum, quod & recta A γ, b proportionaliter secta ipsi AB, sesquialtera sit ipsius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum existens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quã 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12. esse cubum G O, iam demonstratũ est. (Nã numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

a 8. duodecimi.
b 2. sex.



COROLLARIVM. I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. Ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. c Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, quam videlicet demonstrauimus habere octaedtum ad sibi inscriptum cubum.

c 11. sexti decimi.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

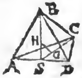
QVONIAM vt ostendimus ad finem lib. 15. cubus, ibique inscripta pyramis in eodem octaedro describun-ur; a Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum;& cubus sibi,ac proinde octaedro, nscriptæ pyramidis b triplus:qualium partium 2. ponetur pyramis,talium 6. erit cubus,& earundem 27. octaedrum.Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam esquialteram,& 6.ad 2.triplam.Igitur octaedrum ad sibi nscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2.hoc est,tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis,&c.Quod erat ostendendum.

a 23.sextidec.
b 20.sextidec.

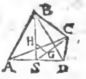
THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide ABCD, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim G, H, centra duarum basium A C D, A B D, commune latus AD, habentium, per quę ex angulis C, B, ad latus commune oppositum A D, rectæ ducantur C GS, B H S, diuidentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos,per scholium propos.12.lib.13.ac propterea conuenientes in medio puncto S.Connexa vero recta GH;cum BH,CG, duplæ sint rectarum H S, G S, ex coroll.propos. 3.lib.14.ac proinde proportionaliter secentur B S, C S, parallelæ erunt BC,HG,& per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum HGS, triangulo B C S, simile. d Erit ergo vt BC,ad CS,ita HG,ad GS;& permutando,vt BC, ad HG, ita CS,ad GS: e Est autem CS,ipsius G S, tripla. Igitur & BC, tripla erit ipsius H G. Quoniam autem latus pyra-



c 2.sexti
d 4.sexti
e 18. quartidecimi.



midis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, vt in propos. 1. lib. 15. demonstratum est; Recta vero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, vt perspicuum est ex demonstratis in propos. 18. lib. 15. (Ibi enim recta GH, iungens centra G, H, basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium diameter fuit basis G NHQ, cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter basis cubi pyramidem ABC D, circumscribentis; GH, vero diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Est enim vt diameter vnius; quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio vtraque sit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus. Vel sic. Quadratum diametri vnius quadrati ad ipsum quadratum est, vt quadratum diametri alterius quadrati ad ipsum quadratum, cum vtrobique sit proportio dupla. [a] Igitur erit quoque diameter ad latus, vt diameter ad latus. Ergo permutando, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat aūt BC, diameter basis cubi circumscripti ad GH, diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, vt ostendimus; habebit quoque latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem, triplam. At vero cubi, cum sint parallelepipeda similia, [b] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi ABDC, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata est triplæ proportionis, vt hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, [c] cum cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplā; Habebit pyramis ABD C, ad cubum sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

a 22. sex

b 33. vndecimi.

c 20. sexdeci.

THEO-

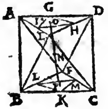
COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione huius propositionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

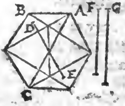
IN octaedro ABCDEF, concipiatur descriptum Icosaedrum. Dico octaedrum esse ad Icosaedrum, vt sunt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Cũ enim vt ex demonstratis in propos. 16. lib. 15. liquet, octo bases Icosaedri in octo basibus octaedri reponantur; sint duæ bases Icosaedri GHI, KLM, in duabus basibus oppositis octaedri ADE, BCF; atque ex N, centro octaedri, nec non & Icosaedri (idem enim vtriusque est centrum, per coroll. 3. propos. 16. lib. 15.) ad basim A D E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, seu circuli ipsum ambientis, ex coroll. lemm. 1. propos. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque est trianguli GHI, per coroll. 2. propos. 16. lib. 15. Cum ergo plana opposita A D E, BC F, parallela sint, ex coroll. 4. propositionis 14. lib. 13. Recta O N, producta perpendicularis quoque erit, per scholium propositionis 14. lib. 11. ad planum BCF, in eiusque propterea centrum P, commune etiam triangulo KLM, cadet. Quare OP, recta altitudo est & octaedri & Icosaedri sibi inscripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo est NO, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icosaedrum in 20. pyramides



æquales eiusdem altitudinis NO: Est autem prisma triplũ pyramidis eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Erit prisma, cuius basis AD E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At vero prisma, cuius eadem basis ADE, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum est prismatis, cuius basis eadem A D E, altitudo vero ON, per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus. Prisma igitur, cuius basis ADE, & altitudo O P, æquale est sex pyramidibus octaedri: Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum sex constituunt, æqualis erit & tertia pars prismatis super basim ADE, & sub altitudine OP, cõstituti; prisma videlicet, cuius basis tertia pars est triãguli ADE, altitudo vero eadem OP. Hoc enim prisma tertia pars est prismatis super basem ADE. & sub altitudine OP; cum per ea, quæ docuimus ad propos. 7. lib 12. prismata eiusdem altitudinis inter se sint, vt bases. Quare duo prismata. quorum vnius basis ADE, & altitudo OP, alterius aũt basis tertia pars basis ADE, & altitudo eadẽ OP, æqualia sunt octaedro ABCDEF. Nõ secus demonstrabimus prisma, cuius basis GHI, altitudo verò OP, æquale esse sex pyramidibus Icosaedri: proptereaq; triplũ huius prismatis, nẽpe prisma, cuius basis tripla sit basis GHI, altitudo autẽ eadem OP, æquales esse 18. pyramidibus Icosaedri. Reliquis igitur duabus Icosaedri pyramidibus, quæ tertiam partem sex pyramidum eiusdem Icosaedri constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basem G H I, & sub altitudine O P, constituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli GHI, altitudo vero eadem O P; Atque idcirco duo prismata, quorum vnius basis tripla sit trianguli GHI, altitudo autem O P, alterius vero basis tertia pars basis GHI, & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icosaedro in dicto octaedro descripto. Iam vero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia, sint per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib 12. vt bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, cõtinentes, (cum vnius basis sit ADE,

nem-

nempe tres tertiæ partes ipsius A D E, complectens, alterius vero basis tertia pars ipsius A D E,) ad bases prismatum Icosaedro æqualium decē tertias partes trianguli GHI, comprehendentes;(cum vnius basis tripla sit trianguli GHI, nimirū nouē tertias partes ipsius GHI, cōtinēs, alteriusvero basis tertiapars ipsius GHI,) Sint aūt vt quatuor tertiæ partes triāguli ADE, ad decē partes tertias triāguli GHI,[a] ita



duæ tertiæ partes ipsius ADE, nēpe dimidiū quatuor tertiarū, ad quinq; tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidiū decē tertiarū: Et vt duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius GHI, ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. sex tertiæ partes ipsius A D E,(hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cum sex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipsius GHI, (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cum quindecim tertias complectantur,) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, vt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.

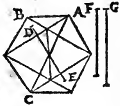
a 15. quinti.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadē cū in Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quā

habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icosaedrum A B C, in quo recta DE, coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sit AC; & F, sit latus Icosaedri, & G, latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionem Icosaedri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icosaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri A C, ad rectam DE. Cum enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeo oppositos angulos in centris basium oppositarum; Erit DE, diameter dodecaedri in Icosaedro



A B C, descripti, cum copulet angulos ipsius oppositos in D, & E, centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri AC, hoc est, in eadem sphæra, in qua Icosaedrum A B C, descripto, cum vtriusque eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri D E, intra Icosaedrum videlicet, A B C, constructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icosaeeri ABC, ad tertiam, videlicet ad Dodecaedrum diametri DE, sibt inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata; nimirum ex proportionibus Icosaedri ABC, ad dodecaedrum diametri A C, in eadem sphæra cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro ABC, descriptum. Cum ergo Icosaedrum A B C, ad Do-

a 11. quartidecimi. decaedrum diametri AC, eadem sphæra comprehensum, sit vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi; ([a]Nam Dodecaedrum diametri AC, ad Icosaedrũ AB C, eiusdé diametri

est,

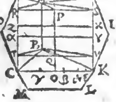
est, vt G, latus cubi ad F, latus Icosaedri. Conuertendo igitur erit Icosaedrum ABC, ad Dodecaedrũ diametri AC, vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi.) At vero Dodecaedrum eiusdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri DE, in Icosaedro videlicet ABC, descriptum, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrũ D E, id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Manifestum est, proportionem Icosaedri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaedrum diametri DE, componi quoque ex proportione F, lateris Icosaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositã, &c. Quod erat demonstrandũ.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

QVONIAM ex demonstratis propos. 8. lib. 15. quatuor latera basis cubi in Dodecaedro descripti subtendunt quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium; sint huiusmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conueniẽtia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, secundum latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundum

dum angulos EAH, CBK. His vero pentagonis inſcriptũ ſit quadratum cubi ECKH, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribentis, ſolidum ſcilicet CBKHAE, conſtans quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorum duo CBK, EAH, [a] triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia ſint lateribus pentagoni A E, A H, anguloſque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque: (cum enim & pentagona ABCDE, ABKIH, per hypotheſin, & triangula ex ipſis ablata CDE, HIK, [b] æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti ECKH Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia, & æqualia, per 10. defin. lib. 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita vt Dodecaedrũ ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circumſtantibus conflatum, æqualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit a CEHK, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi CK, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmẽto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaque recta NO, quæ parallela eſt lateri pentagoni AB, & in quam cadunt perpendiculares AP, B Q, demiſſæ in planum EK, vt conſtat ex demonſtratis propoſ. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN, VX, VR, X S, figuræ propoſ. 17. lib. 13.) Erit vtraque recta AB, PQ, maius ſegmentum lateris cubi NO, vel HK, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pẽtagoni AB, ſeu maioris ſegmẽti lateris cubi, vt liquet ex eadẽ propoſ. 17. lib. 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoque RT, SV, maiora ſegmenta late-



a 4. pri.

b 4. pri.

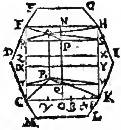
rum EC,HK; atque adeo ER, CT, ſimul, & HS, KV, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, conſtituantur duæ pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propoſ. 6. lib. 12. æquales inter ſe erunt, cum & earum baſes ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales ſint; conſiſtentque extra ſolidum ABTVSR.[a] Quoniam autem AS, ipſi BV, & AR, ipſi BT, æqualis eſt, & parallela, cum coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, [b] parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV, atque adeo inter ſe æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. cum latera vnius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum ABTVSR, contentum duobus aduerſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, priſma eſt, ex definitione.

a 33. pri.
b 15. vndecimi

IAM vero, cum oſtenſum ſit rectas HS, KV, minus ſegmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriuſque HS, & KV; & ipſius VX, minoris ſegmenti lateris HK, duas tertias partes contineat VY, tertia vero pars ſit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales ſunt oſtenſæ; [c] vtriuſque vero earum dupla eſt pyramis ſuper baſem TX, & ſub eadem altitudine PA, vel QB, conſtituta, [d] quod & baſis TX, dupla ſit baſis CV, vel RH; Aequalis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVKB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet priſmatis, cuius baſis eadem TX, & altitudo eadem QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis ſit ipſi VX, vt demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 7. lib. 12. Item eiuſdem priſmatis, cuius baſis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VX, duas tertias partes continet priſma, cuius baſis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VY, ex ſcholio propoſ. 25 lib. 11 [e] quod & baſis TY, duas partes tertias complectatur baſis TX. Igitur & priſma, cuius baſis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB;

c 6. duodecimi.
d 1. ſexti
e 1. ſex.

Ac proinde hoc prisma appositum prismati ABTVSR, efficiet prisma æquale solido CBKHAE, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, comprehendente, & ex VS, maiore segmento, ideoque a base cubi deficientem rectangulo αX, contento sub latere cubi αY, & sub X Y, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proxime dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autẽ duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadem altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pẽtagoni AB seu maioris segmenti lateris cubi, & super bases a base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis à base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo vero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorũ, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: Itẽq; Cβ, maius segmentum, & βK, minus bifariam in γ, δ; atque ex βK, abscindatur βε, æqualis ipsi βγ, seu C γ, ita vt Cγ, vel γβ, vel ζε, dimidia pars maioris segmenti Cζ, æ-



qualis sit ipsi QB,& Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento βK, abscindi recta æqualis ipsi Cγ, dimidio maioris segmenti; quia βK, maior est, quam dimidium maioris segmenti Cβ. Cum enim sit, vt CK, ad Cζ, ita Cζ, ad ζK; sit autem CK, minor, quam dupla ipsius Cζ, quod Cβ, sit ipsius maius segmentum; erit quoque C ζ, minor, quam dupla ipsius ζK, hoc est, erit βK, maior, quam dimidium ipsius Cβ. Quoniam igitur est, vt tota CK, ad maius segmētum Cβ, ita maius segmentum Cβ, ad minus βK;[a] erit quoque vt CO, dimidia ipsius CK, ad Cγ, vel βε, dimidiam ipsius Cβ, ita Cγ, vel ζε, ad βδ, dimidiam ipsius ζK; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentū Cγ, vel βε, & minus ζδ. Quare & ζδ, minus segmentum secabit βε, maius segmentum extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. eritque maius segmentum ζδ, minus autem δε; Ac propterea rursus δε, minus segmentum secabit rectam δK, maiori segmento ζδ, æqualem, extrema ac media ratione, minusq; segmentum erit εK. Deficit igitur Cε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi CK, minore segmento εK, rectæ δK, vel sibi æqualis rectæ βδ, quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentum minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum, a base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudinem vero ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.

a 15. 5.

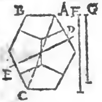
COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit. Al-

terius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedū addatur illi parallelepipedo, quo cubum a Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo vero a latere cubi deficit minore segmēto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immo vero alter cubus, vt demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quā habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.



IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta coniungens centra basium oppositarum DE; At vero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diame-

tri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta DE, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem sphæra cum Icosaedro intra Dodecaedrum ABC, collocato describetur, cum eandem habeant diametrum DE. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri DE; & Icosaedro eiusdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, descripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro DE, descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro ABC, descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll. propos. 17. lib. 12. a Dodecaedrum vero diametri DE, ad Icosaedrum eiusdem diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro ABC, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquido constat proportionem Dodecaedri ABC, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter DE, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diame- AC, ad diametrum DE, rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

a 11. quartidecimi.

THEOR.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentum eius lineæ, quę dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua describitur, nona pars est, a cum pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla cõtineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cũ Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt si dicta

a 25. sex tideci.

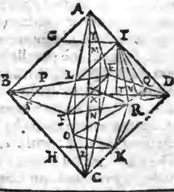
duo

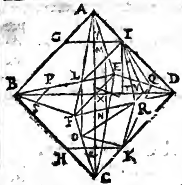
duo parallepipeda addãtur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est; &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrũ Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptũ est Icosaedrũm, sit ABCDEF, repetita figura proposi.16.lib.15.vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrum inscriptum componentia esse IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam I T, perpendicularem ad BD, æqualem esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrum ABC D E F, superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri QR, altitudo vero IT, maius segmentum semidiametri AX. Cum enim in quatuor basibus octaedri D E A, D F A, DEC, DFC, angulum solidum octaedri D, constituentibus positæ sint quatuor bases Icosaedri I M Q, I L R, K N Q,





KOR; remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus octaedri quatuor triangula I Q D, IRD, KQD, K RD, quibus si accedant duo triāgula Icosaedri QIR, KQR, & commune triāgulum D Q R, constituentur duæ pyramides super communem basem D Q R, nempe IDQR, KDQR, inter se æquales, per coroll. propos. 5. lib. 12. cum earum altitudo sit recta eadem IT, maius videlicet segmentum semidiametri octaedri. (Nam quemadmodum AX, secta est a recta GI, in Y, extrema ac media ratione, ita quoque secta est CX, a recta HK, in Z. Quare si ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis KDQR, [a] erit ea æqualis rectæ ZX, maiori segmento semidiametri CX, hoc est, ipsi IT.) Quæ quidem pyramides extra Icosaedrū in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se, & dictis duabus æquales extra Icosaedrum prædictum: ita vt Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus ęqualibus. Quia vero triangulum DQR, dimidium est quadrati lateris DQ; (Cū DQ, DR, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octaedri, angulumque contineant rectum.) erit recta Q R, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius QR, duplum erit quadrati lateris DQ, ideoque quadruplum trianguli D Q R. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ Q R, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum D Q R, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis D Q R, & altitudo I T, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis IDQR, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo,

[a] 34. pri

vel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrũ ambientes; Aequale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, maius segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptum; Ac proinde octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cum enim ex demonstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum: a octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe rectæ QR, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri, recta videlicet IT, seu YX: erit, vt octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur, (b quod Pyramis dupla sit sibi inscripti octaedri) superet duplum Icosaedri in octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata a nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.

a 31. sextidec.

b 21. sextidec.

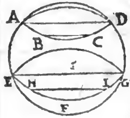
DE QVINQVE CORPORVM Regularium deſcriptione in data ſphæra, ex Pappo Alexandrino.

QVONIAM Euclides libro 13. quinque corpora Regularia ſeorſum extra ſphæram conſtruxit, deinde vero eadem à ſphæra comprehendi, noua demonſtratione confirmauit; nō erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data ſphæra deſcribat: præſertim cum eius ratio multo clarior videatur, & facilior, quam conſtructio illa ab Euclide præſcripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda ſunt, quorum aliqua etſi per elementa ſphærica Theodoſij demonſtrantur, non tamen propterea ordinem Euclidis peruertere cenſeri poſſumus; quippe cum propoſitiones ſphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex ſolis 19. prioribus propoſitionibus lib. 11. Euclidis pendeant; vt commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium conſtructionem percipi poſſint. Incitandis autem Theodoſij propoſitionibus ſequemur ordinem noſtrorum commentariorum, quos in eadem elemēta conſcripſimus. Hinc ergo initium ſumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in ſphæra parallelis, dataque in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli ABCD, EFG; ſitque primum in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda ſit diameter parallela. Ducatur, [...] in ſcholio propoſ. 18. lib. 11. docuimus, p[er] diametrum AD, planum rectum ad [cir]culum ABCD, a faciens in ſphæræ ſup[er]ficie circulum AEG D. Quoniam igi[tur] circulus AEGD, circulum ABCD, bi[fa]riam, & ad angulos rectos ſecat, erit [cir]culus AEGD, maximus, trāſibitque



a 1. 1. Theod.

polo

polos circuli ABCD, ex schol. propos. 15. lib. 1. Theod: ac proinde & per polos circuli EFG, a 1. 2. Theod. *a cum paralleli eosdem polos habeant;* b 15. 1. Theod. *b ideoque eum bifariam secabit. Communis ergo sectio EG, eius diameter erit; c qua cum sit ipsi AD, parallela, patet propositum.*

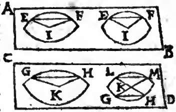
DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, nō sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo EFG. c 16. vndecimi. *d Ducatur ipsi BC, per centrum circuli ABCD, diameter parallela AD; cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime ostendimus.* d 31. pri *Quoniam igitur vtraque BC, EG, eidem AD, parallela est, ex constructione, e ipsa quoque BC, EG, inter se parallelae erunt. Quod est propositum.* e 9. vndecimi.

EADEM ratione recta BC, ducetur in circulo EFG, parallela HI, à diametro EG, diuersa, quae ipsi BC, aequalis sit, si modo BC, maior non sit diametro EG. Nam si in circulo EFG, ducatur ipsi BG, parallela HI, & aequalis, vt ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

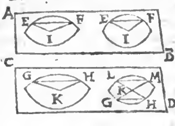
LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duae rectae parallelae abscindant arcus similes; erunt duae rectae coniungentes extrema vnius rectae cum centro, parallelae duabus rectis, quae extrema alterius rectae cum centro coniungunt.

IN planis parallelis AB, CD, descripti sint duo circuli, in quibus recta EF, GH, primum parallelae sint, ad easdem partes centrorum I, K, auferanturque arcus similes EF, GH, ac tandem iungantur ad centra recta EI, FI, GK, HK. Dico tam EI, GK, quam FI, HK, parallelas esse. Quoniam enim arcus EF, GH, similes sunt, erunt anguli I, K, aequales, ex scholio propos. 22. lib. 3. f Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, aequales erunt. f 32. pri



a 5.pri.



a Cum ergo tam illi, quam hi, sint inter se æquales; erit tam angulus E, angulo G, quam angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis rectæ EF, GH, parallelæ sunt, & rectæ EI, GK, ad easdem partes plani per EF, GH. ducti efficiunt cum ipsis æquales angulos E, G; erunt ex ijs, quæ in scholio propos. 16. lib. 11. demonstrauimus, EI, GK, parallelæ: Eademque ratione FI, HK, parallelæ erunt.

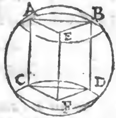
DEINDE sint EF, GH, parallelæ, non ad easdem partes centrorum I, K. *Dico tam EI, HK, quam FI,* GK, *esse parallelas. Productis enim* GK, HK, *iungatur recta LM. Et quia latera* GK, HK, *lateribus LK, MK, sunt æqualia,* b *angulosque ad verticem K, æquales continent;* c *erunt & bases GH, LM, & anguli H, L, æquales, & anguli G, M.* d *Igitur arcus GH, LM, æquales sunt,* e *& rectæ GH, LM, inter se parallelæ: Ac proinde cum vtraque EF, LM ipsi GH, sit parallela,* f *erũt & EF, LM, parallelæ inter se. Quia igitur EF, LM, parallelæ sunt abscindentes ad easdem partes centrorum arcus similes EF, LM; (Nam cum arcus GH, sit arcui EF, similis, erit quoque arcus LM, qui arcui GH, æqualis est, eidem arcui EF, similis.) erunt tam EI, LK, hoc est, EI, HK, quam FI, MK, hoc est, FI, GK, parallelæ. Quod est propositum.*

b 14.pri c 4.pri. d 28.ter e 27.pri f 9.vndecimi.

LEMMA III.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductę sint duę rectę parallelæ & ęquales, ad easdem partes centrorum; rectę harum parallelarum extrema pũcta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares..

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales A B, CD. in quibus sint duæ rectæ æquales & parallelæ A B, C D, ad easdem partes centrorum, quarum extrema iungantur ad easdē partes rectis AC,BD. Dico rectas AC,BD, æquales quoque esse, ac parallelas, et ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim AB, CD, parallelæ sunt; a *erunt A C, BD. in eodem cum ipsis plano. Quare cū AB,CD, sint etiā æquales;* b *æquales quoque erunt ac parallelæ AC, BD, quod est primum.* a 7. vndecimi b 33. pri



EX centris deinde E,F, ductis rectis EA,EB;FC,FD, iunctaque recta EF; erunt tam AE, CF, quam BE, DF, parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. c *Igitur & AC,EF, & BD,EF, parallelæ erunt, & æquales.* d *Quoniam vero circuli AB,CD, paralleli circa eosdem polos sunt,* e *recta per eorum polos ducta transibit per eorundem centra, & per centrum sphæræ, & ad plana eorundē recta erit. Quocirca recta EF, eorum centra coniungens, per eorum polos, & centrum sphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur transire, nimirum recta per eorum polos extensa, quod est absurdū. Haberent enim illæ rectæ segmentū commune EF.* f *Igitur EF, ad plana circulorum AB,CD, recta est:* g *Ac propterea et vtraque AC,BD, ipsi EF, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod est secundum.* c 33. pri d 1. 2. Theod. e 10. 1. Theod. f 10. 1. Theod. g 8. vndecimi.

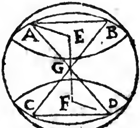
HAEC demonstratio locum etiam habet, quando parallelæ AB,CD, sunt circulorum diametri, sed tunc EA, EB, FC, FD, erunt partes diametrorum, vt patet.

LEMMA IIII.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli & ęquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes cē trorum: rectæ harum parallelarum extrema

puncta non ad easdem partes coniungẽtes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt,& inter se ęquales; Rectę vero earundẽ parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes,& ęquales ac parallelæ inter se sunt,& cum parallelis rectos angulos constituunt.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB,CD, & in ijs duæ rectæ parallelæ & æquales AB,CD, non ad easdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad easdem partes iungantur rectis AD, BC. Dico rectas AD,BC, in centro sphæræ se intersecare, ideoque diametros esse sphæræ inter se æquales. Quoniam enim A B, C D, parallelæ sunt; a erunt A D, B C, in eodem cum ipsis plano; ac proinde se mutuo intersecabunt, vt in puncto H: quod dico esse centrum sphæræ. Connectantur enim circulorum centra E, F, rectis E A, E G; FD, FG. b Et quia anguli A G B, C GD, ad verticem æquales sunt: c Item tam alterni anguli BAD,CDA: quam alterni ABC,DCB; æquiangula erũt triangula ABG, CDG. d Igitur erit vt AB, ad BG, ita D C, ad C G: Item vt AB, ad AG, ita D C, ad D G. Cum ergo A B, C D, ponantur æquales, e erunt quoque tam BG, C G, quam A G, D G, inter se æquales. Rursus quia A E, D F, semidiametri circulorum æqualium æquales sunt; sunt autem ex 2. lemmate & parallelæ, f ideoque anguli alterni EAD, FDA, æquales; erunt duo latera EA, AG, duobus lateribus FD, DG, æqualia, angulosque comprehendent æquales. g Igitur & bases EG,FG, & anguli A G E, D G F, æquales sunt.



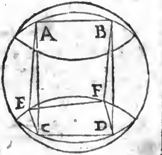
a 17. undecimi.
b 15. pri.
c 29. pri.
d 4. pri.
e 14. qu.
f 29. pri.
g 4. pri.

Et

a Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallelæ AE, DF; b & EG, FG, in eodem plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, FG, in rectum & continuum constituta, propter æquales angulos AGE, DGF, ut ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ transibit, ut in præcedenti lemmate demonstrauimus, c perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales sint ostensæ, erit G, centrum sphæræ, d propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter a centro sphæræ absunt; inæqualiter vero abessent, si centrum sphæræ in recta EF, diceretur aliud punctum quam G. Quocirca AD, BC, diametri sphæræ sunt, & inter se propterea æquales. quod est primum.

a 7. undecimi. b 2. undecimi. c 10. 1. Theod. d 6. 1. Theod.

SED iam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad easdem partes iungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, esse rectos. Quod enim sint parallelæ & æquales, e manifestum est, cum extrema puncta parallelarum æqualium coniungãt. Quod autem ad AB, CD, sint perpendiculares, ita ostendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpendiculares CE, DF, iunganturque EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti sunt, erunt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, semicirculi erunt, f & anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, rectæ CD, EF, æquales sunt, g ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad utramque EC, EA, & ad utramque FD, FB; ut ostendimus, h perpendicularis erit & ad pla-



e 33. pri. f 31. ter. g 9. undecimi. h 4. undecimi.

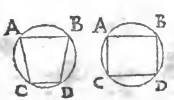
num

num trianguli A E C, per E C, E A, ducti, & ad planum
a 8. vndecimi. *trianguli BFD, per FD, FB, ducti:* [a] *ac propterea & CD, A B, ipsi E F, parallela, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli C A B, A B D, B D C, D C A, recti erunt. Quod est secundum.*

LEMMA V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelæ, rectę earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erũt: Et si parallelę fuerint ęquales, coniungentes non solum ęquales, sed & parallelæ erunt, rectosque cum ipsis angulos conficient.

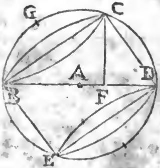
SINT in sphera dua parallela AB, C D, quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis A C, BD, Dico AC, BD, aquales esse. Quia enim parallela sunt
b 7. vndecimi. *AB, CD;* [b] *erunt AC, BD, in eodem cum ipsis plano. Ducto igitur per ipsas plano,* [c] *fiat in*
c 1. 1. Theod. *sphara circulus A B D C, in quo cum parallela sint A B, C D; erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus AC, BD, aquales:*
d 29. ter *[d] ideoque & recta A C, BD, aquales erunt Quod si parallela AB, CD, fuerint aquales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo opposita latera AB, CD, parallela, & aqualia; erit ex scholio propos. 31. lib. 3. ABDC; parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod est propositum.*



LEMMA VI.

IN data sphęra duos circulos ęquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphęrę sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæra centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximum BCDE, cuius diameter BD, ex coroll. 1. propos. 1. lib. 1. Theod. Secta autem BD, in F, vt BF, ipsius FD, dupla sit; erit BD, talium partium 3, qualium 2. est BF; ac proinde BD, ipsius BF, sesquialtera est. Ducta quoque FC, ad BD, perpendiculari, iungatur recta BC, DC, ductaq; DE, ipsi BC, parallela, connectatur recta BE. a Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quã duo BED, CBE, duobus rectis æquales sunt; b estque tam BCD, quam BED, rectus; erit quoq; & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex scholio propos. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelogrammum est; c ideoque recta BC, DE, æquales sunt. Diuiso tam arcu BC, bifariam in G, erit quoque arcus EGD, diuisus bifariã in G, quod ex scholio propos. 27. lib. 3 arcus quoque BE, CD, æquales sint. Polo igitur G, & interuallis GB, GE, circuli in superficie sphæra describantur transeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum GB, GC, quam GE, GD; d qui paralleli erunt, cum eosdem habeant polos. e Et quia circulus maximus BCDE, per polos secat circulos BC, ED, bifariam; erunt BC, ED, diametri ipsorum, quæ cum æquales sint ostensæ, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum sphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentia sesquialteram. Quoniam enim ex coroll. propos. 8. lib. 6. tres rectæ DB, BC, BF, continue proportionales sunt; erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC: Est autem BD, ipsius



a 29. pri.
b 31 ter.
c 34. pri.
d 2. 2. Theod.
e 15. 1. Theod.

BF, sesquialtera, vt ostensum est. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atque adeo & quadrati ex DE, sesquialterum est: atque idcirco diameter sphæræ BD, vtriusque diametri BC, DE, potentia sesquialtera est. quod est propositum.

HIS demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinque corpora regularia.

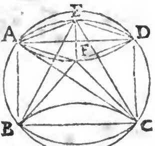
PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data sphæra Pyramidem describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, æquales, & paralleli, quorum diametrorũ potentia sit sesquialtera diameter sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD, [a] qui eos ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde cum eis communes sectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, secans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, esse pyramidem, hoc est, quatuor triangula EBC, BCF, CFE, EFB, esse æquilatera et æqualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; erit AC, diameter sphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum recta, ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, descriptum, vt constat ex propos. 6. lib. 4. Itaque quoniam ex constructione quadratum ex diametro sphæræ AC, sesquialterum est quadrati ex AD, diametro circuli; si ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cum ergo quadratum ex AC, [b] æquale sit quadratis ex AD, DC, quod angulus ADC, rectus sit, ex

a 15. 1. Theod.

b 47. pri



defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex D C, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Est autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex scholio propos. 47. lib. 1. Aequalia ergo sunt quadrata ex DC, DF; a quibus cum æquale sit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; erit quadratum ex CF, quadrati ex D F, quoque duplum, proptereaque quadrato ex A D, æquale. Recta igitur CF, recta AD, hoc est, ipsi B C, æqualis est. Eodem modo ostendetur BF, eidem B C, æqualis; ideoque BCF, triangulum est æquilaterum. a 47. pri

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum est ostensum; est autem, ex scholio propos. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex D E: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: b quibus cum æquale sit quadratum ex C E, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; duplum quoque erit quadratum ex C E, quadrati ex DE. Aequalia ergo sunt quadrata ex CE, AD, proptereaque recta CE, recta AD, hoc est, rectis B C, E F, æqualis est, atque adeo & recta C F, quæ ipsi B C, ostensa est æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam est, & ipsi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonstrabimus, triangulum B E F, esse æquilaterum, & ipsis BCF, F C E, æquale. Ex quo sequitur & B C E, triangulum æquilaterum esse, & alijs tribus æquale: quippe cum latera BE, CE, ipsi BC, ostensa sint æqualia. Pyramis ergo est E B C F, ex defin. 26. lib. 11. & in data sphæra descripta, cum eius anguli solidi E, B, C, F, in superficie sphæræ consistant. quod est propositum. b 47. pri

COROLLARIVM.

HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Nam latus pyramidis est æquale diametro AD, vt ostendimus, & ex constructione diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri AD.

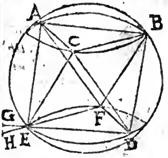
PRO-

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data ſphæra octaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales & paralleli ABC, DEF, ita vt ſphæræ diameter diametri cuiuslibet eorum potentia ſit ſeſquialtera.

a 2. quarti. *a Deſcripto autem triangulo æquilatero A B C, in circulo A B C, ducatur per primum lemma, recta A B, in circulo DEF, parallela & æqualis DE, ad diuerſas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo D E F, deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero D E F, erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus trianguli ABC, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum AB, DE, æqualitatem; parallela vero, ex ſchol. propoſ. 16. lib. 11. Cũ enim parallelæ ſint AB, DE, & anguli ABC, DEF, æquales; productis rectis DE, FE, ad G, H, erunt quoque anguli ABC, GEH, æquales. Cum ergo parallelæ ſint AB, GE, & BC, EH, ad eaſdem partes plani per AB, GE, ducti; erunt quoque BC, HE, hoc eſt, EC, EF, parallelæ, ex illo ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Eadem ratione parallela erit DF, ipſi AC. Connectantur denique AE, EC, CD, DB, BF, FA, vt in figura. Dico AD, octaedrum eſſe, hoc eſt, octo triangula ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera eſſe, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus ſphæræ, recta AB, DE, æquales ſunt & parallela ad diuerſas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ AD, B E, (quas tamen confuſionis vitandæ gratia non duximus) diametri ſphæræ, & rectæ AE, BD, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipſas AB; DE. b Quadratum igitur ex BE, duobus quadratis ex BD, DE, æquale erit: Poſito autem quadrato ex diametro ſphæræ BE, 6. quadratum ex D E, eſt 3. (Nam cum per conſtructionem dia-*



b 47. pri

meter

meter sphæræ potẽtia sit sesquialtera diametri circuli DEF: posito quadrato ex BE, 6. erit quadratum diametri circuli DEF, 4. At posito quadrato diametri circuli DEF, 4. quadratum lateris triãguli æquilateri DE, est 3. quod ex coroll. 1. propos. 12. lib. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex BD, est 3. ac proinde quadrata ex DE, BD, æqualia sunt, & rectæ ipsæ DE, BD, æquales. Est autem DE, ipsi AB, per constructionem, & BD, ipsi AE, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ AB, BD, DE, EA, æquales erunt, constituentq; quadratum ABDE, cum anguli ad A, B, D, E, recti sint ex eodem 4. lemmate.

RVRSVS quia BC, EF, parallelæ sunt & æquales ad diuersas partes centrorum; erunt quoque iunctæ rectæ BE, CF, non ad easdem partes, diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ BF, CE, æquales inter se, atque ad BC, EF, perpendiculares, eritque rursus, vt prius, quadratum BCEF. Non aliter ostendemus, ACDF, quadratum esse; cum iunctæ rectæ AD, CF, sint quoque sphæræ diametri ex 4. lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata AD, BE, CF, constructa sint super latera æqualia AB, BC, CA, nimirum super latera trianguli æquilateri, cum AB, latus sit quadrati AD; & BC, quadrati BE; & CA, quadrati CF; erũt omnia triãgula octo ABC, CAE, BCD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est AD, ex defin. 27. lib. 11. & in data sphæra descriptum, cum eius anguli solidi A, B, D, E, C, F, sphæræ superficiem attingant. quod est propositum.

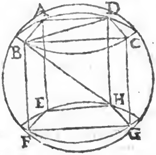
COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratũ enim est, quadratum ex BE, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex DE, lateris octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

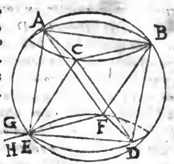
IN data sphæra cubum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli ABCD, EFGH, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ. a Descripto autem quadrato ABCD, in circulo ABCD, du- a 6. quarti.



catur per 1. lemma rectæ A D, in circulo E F G H, parallela EH, & æqualis ex eadem parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo E F G H, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato EFGH, erunt singula eius latera singulis lateribus quadrati ABCD, æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum A D, E H, æqualitatem: parallela vero, ex scholio propos. 16. lib. 11. Nam quia parallelæ sunt AD, EH, suntq; anguli æquales ADC, EHG, nimirum recti; erunt quoque D C, H G, parallelæ, cum sint ad easdem partes plani per AD, EH, ducti, & sic de cæteris. Iungãtur denique ad easdē partes centrorum rectæ AE, BF, CG, DH, quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter se parallelæ. Dico AG, esse cubum, hoc est, sex quadrilatera ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, esse quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis BH, BD, erit ex lemmate 4. BH, diameter sphæræ; at BD, diameter circuli A B C D, quippe quæ diameter sit quadrati circulo inscripti. Quoniam igitur per constructionem, quadratum ex BH, sesquialterum est quadrati ex BD; quadratum autem ex BD, quadrati ex BC, duplum, ex scholio propos. 47. lib. 1. si statuatur quadratum ex BH, 3. erit quadratum ex BD, 2. & quadratum ex DC, 1. atque adeo quadratum ex B H, quadrati ex DC, triplũ erit. Rursus quia quadratum ex B H, est 3. & quadratum ex BD. 2. a estque quadratum ex BH, æquale quadratis ex BD,
a 47. pri. DH, quod angulus B D H, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit, erit quadratum ex DH, 1. Quadratum igitur ex B H, triplum est quadrati ex DH. Fuit autem idem quadratum ex BH, triplum quadrati ex D C. Aequalia ergo sunt quadrata ex DC, DH, ac proinde rectæ DC, DH, æquales. b Cum ergo oppositis lateribus GH, CG, æquales sint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo C H. Cum igitur & anguli recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit CH.

Eadem



Eadem ratione & B E, AH, BG, quadrata ostendētur: Sed & AC, EC, quadrata sunt ex constructio ne. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se aequalia, ob laterum aequalitatem. Cubus igitur est AG, ex defin. 25. lib. 11. & in data sphara descriptus, cum eius anguli solidi A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphara contingant. quod est propositum.

COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphærę BH, triplum esse quadrati lateris cubi D C, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque est, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triãgulum Octaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus ABCD, huius figurę æqualis est circulo ABC, figuræ antecedeutis propositionis. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data sphæra Icosaedrum describere.

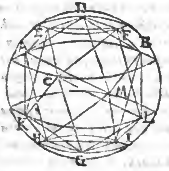
REPERIATVR a recta linea, ad quam sic se habeat diameter sphara data, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti: Fiatque ex coroll. propos. 6. lib. 10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum recta inuenta ad quadratum alterius cuiusdam linea, ad cuius interuallum, veluti semidiametrum, circulus in data sphera describatur, Hoc autem facili negotio ita fiet. Descripto maximo circulo in sphara data, b accõmodetur in eo recta, qua inuenta semidiametri sit dupla, cum hac recta minor sit diametro sphara, siue illius circuli maximi, vt infra probabitur. Nam si per eam rectam planum ducatur rectum ad circulum illum maximum, c faciet id circulum ABC, in sphara

a 12. sex

b 1. qn.

c 1. 1. Theod.

cuius ſemidiameter, ex conſtructione, potentia ſubtripla eſt recta initio inuenta. Deinde [a] inueniatur rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat data ſphæra diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti; Fiatque vt 3. ad 1. ita per coroll. propoſ. 6. lib. 10. quadratum recta inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo ABC, parallelus; quod fiet, ſi in eodem illo circulo maximo accõmodetur recta æqualis duplæ ſemidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro; ex ijs, quæ ad propoſ. 1. lib. 4. demonſtrauimus, & per eam rectam planum extendatur priori circulo parallelum, hoc eſt, ad dictam circulum maximum rectum, ex ſcholio propoſ. 18. lib. 11. Nam per idem ſcholium, planum hoc erit circulo ABC, parallelum, [a] facietque in ſphæra circulum DEF, cuius ſemidiameter ſemidiametro inuentæ æqualis eſt. His duobus circulis ex altera parte centri ſphæræ alij duo æquales ac paralleli deſcribantur GHI, KLM, quod facile fiet, ſi illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c. [c] Deſcripto autem in circulo DEF, triangulo æquilatero DEF, ducatur lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo, recta linea AB, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis ſit vni lateri trianguli æquilateri in circulo ABC, deſcripti: Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & æqualis: Ac denique huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri, parallela HI, & æqualis ipſi EF, hoc eſt, lateri trianguli æquilateri in circulo GHI, deſcripti. Completis ergo triangulis æquilateris ABC, KLM, GHI, erunt ſingula latera ſingulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipſi DF; at BC, MK, GI, ipſi DE, quod probabitur ex ſcho-



[a] 12. ſex
[b] 1. 1. Theod.
[c] 2. quar

lio

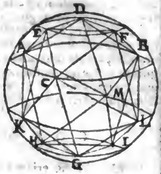
lio propos. 16. lib. 11, vt in problemate secundo ostendimus parallelas esse EC, EF, ad diuersas partes centrorum ductas. In figura non descripsimus ea triangula in circulis A B C, KLM, ne multitudo linearum confusionem pareret, sed tantum laterum extrema puncta notauimus. Postremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ, videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF; ex G, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emissas esse cernis. Dico DG, esse Icosaedrũ, hoc est, viginti triangula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. esse æquilatera, & æqualia. Quod vt demonstretur, ostendendum prius est, Icosaedrum in sphæra descriptum (posse autem in sphæra data describi Icosaedrum, Euclides docuit propos. 16. lib. 13.) suos 12. angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, nimirum ternos angulos in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notauimus.

SIT igitur in sphæra descriptum Icosaedrum DG, duodecim angulos statuens in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinque rectæ DE, DA, DM, DB, DF. æquales sunt, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium; si ex pole D, per E, in sphæra circulus describatur, transibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum E A M B F, in vno plano erit; nimirum in plano illius circuli. Cum ergo eius latera sint æqualia, vtpote latera Icosaedri; erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex ijs, quæ ad finem lib. 4. demonstrata sunt a nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit A K C F D, ob quinque rectas æquales E A, E K, E C, E F, E D: Et K H M D E, ob quinque latera Icosaedri inter se æqualia A K, A H, A M, A D, A E: Et H G C E A, ob quinque latera Icosaedri æqualia K H, K G, KC, KE, KA: Et GIMAK, ob latera quinque Icosaedri æqualia HG, HI, HM, HA, HK: Et ILCKH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, GK, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FD M I L, ob quinque

rectas aquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinque aquales FD, FE, FC, F L, F B: Et D A H I B, ob quinque latera Icoſaedri aqualia MD, M A, MH, MI, M B: Ac tandem G L F E K, ob quinque Icoſaedri latera aqualia CG, CL, CF, CE, CK, ita vt 12. pentagona aquilatera, aquiangulaque inter ſe aqualia conſtituantur. Quoniam vero recta ſubtendens angulum pentagoni aquilateri, & aquianguli oppoſito lateri aquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus; erit iuncta recta AB, ipſi EF, parallela in pentagono E A M B F: & AC, iuncta ipſi D F, parallela in pentagono AKCFD: Et BC, iuncta parallela ipſi DE, in pen-
a 15. vndecimi. *tagono DECLB.* a *Plana ergo per rectas DE, EF, & C B, B A, ducta parallella ſunt,* b *faciuntque circulos parallelos*
b 1. 1. Theod. *in ſphara DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta KL, ipſi HI, parallela in pentagono I L C K H: Et iuncta K M, ipſi G I, in pentagono G I M AK: Et L M, iuncta ipſi G H, in pentageno L B MHG: Ac propterea circuli in ſphara paralleli erunt G H I, K L M. Non aliter erit A B, iuncta ipſi H I, parallela in pentagono D A H I B: Et iuncta KL, ipſi E F,*
c 9. vndecimi. *in pentagono G L F E K.* c *Igitur E F, H I, cum ſint eidem iuncta AB, vel KL, parallela, inter ſe parallela ſunt, Eademque ratione D E, G I, cum ſint eidem iuncta B C, vel K M, parallela, inter ſe parallela erunt; propereaque plana circulorum D E F, G H I, per rectas D E, E F, & HI, GI, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in ſphara DEF, ABC, K L M, G H I, paralleli inter ſe ſunt: & tam circuli DEF, GHI, inter ſe aquales, ob triangula aquilatera in illis deſcripta aqualia, quam circuli ABC, KLM, inter ſe etiã aquales, ob triangula aquilatera aqualia in ipſis, qua ex iunctis AB, BC, CA; & KL, LM, MK, conſtituuntur; quippe cum latera hac ſint recta ſubtendentes angulos pentagonorum aqualium.*

QVIA vero iuncta recta KB, qua connectit non ad eaſdem partes extrema K, B, parallelarum KL, AB, in parallelis circulis non ad eaſdem partes centrorum ductarum, ſphara diameter eſt, & angulus BAK, rectus ex 4. lẽmate, quod KA, connectat ad eaſdem partes extrema K, A, earundem
d 47. pri *parallelarum;* d *erit quadratum diametri KB, aquale duo-*

bus



bus quadratis ex AB, AK. Rursus quia in pentagono E A MBF, recta iuncta A B, angulum AMB, subtendit: Vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum, ex scholio propositionis 2. lib. 14. erit AB, iuncta ad E F, vel AK, ipsi EF, aequalem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco a cum latus pentagoni possit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum: erit diameter sphaerae KB, (quae ambas AB, AK, potest, vt ostendimus,) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus est hexagoni, & AK, vel EF, latus decagoni. Quare sphaerę diameter KB, ad iunctam AB, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad E F, eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni: b Ac proinde cum tam AB, latus trianguli aequilateri in circulo DEF, potentia triplũ sit semidiametri sui circuli; erũt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, KLM, qui illis aequales sunt, illi, quos in principio propositionis descripsimus. Ex quo patet, rectam, quae dupla est semidiametri initio inuenta, minorem esse diametro sphaerae, vt supra diximus.

a 10. tertijdec.

b 12. tertijdec.

HIS demonstratis facili negotio concludemus, solidam figuram a nobis descriptam DG, esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphaera descripto, cuius basis triangulum DEF, omnes eius anguli solidi cadant in terna pũcta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphęrae diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeo vt si diameter sphaerae fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus

decagoni in eodem illo in circulo. Nam descripto Icosaedro DG, in sphæra, ostensum est esse diametrum sphæræ KB, ad EF, latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Isosceles constituant: a ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni:

a 20.pri

COROLLARIVM.

COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, descriptorum, ita diameter sphæræ KB, ad iunctam AB, ex constructione: erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad iunctum AB. b Est autem latus hexagoni in circulo ABC, (hoc est, semidiameter) potentia subtriplum rectæ iunctæ AB, quod AB, sit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia sub triplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo ABC, descripti.

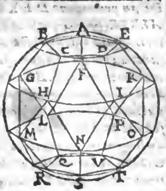
b 12. tertijdec.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propos. ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, ita vt semidiametri circulorum ABCDE, QRSTV, sint potentia subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; semidiametri vero circulorum FGHIK, LMNOP, potentia sint subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter sphæra sic se habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Descripto autem in circulo ABCDE, pentagono ABCDE, æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri CD, ad easdem partes centrorum parallela HI, in circulo FGHIK, & æqualis lateri pentagoni

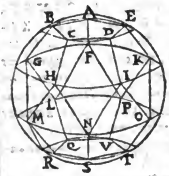
eius-



eiusdem circuli, ex 1. lemmate: Recta autem HI, ad diuersas partes centrorum agatur eodem modo parallela LP, in circulo LMNOP: Huic tandem LP, ad easdem centrorum partes ducatur parallela QV, in circulo QRSTV. Completis autem pentagonis in hisce tribus circulis, (quorum tamen latera, vt confusionem vitaremus, non duximus, sed eorum tantum extrema puncta notauimus.) erunt singula latera eorum singulis lateribus pentagoni ABCDE, parallela, eo ordine, quo lateri CD, parallela ducta sunt: quod demonstrabitur, vt in probl. 2. ostendimus parallelas esse BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera iuncta, parallela erũt ipsi BC, &c. Postremo ex quolibet 20. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectae; vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides esse emissas. Dico AS, Dodecaedrum esse, hoc est, duodecim pentagona ABCDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, aequilatera esse aequiangula, & aequalia. Quod vt ostendatur, demonstrandum prius est, Dodecaedrum in sphaera descriptum (posse autem in data sphaera Dodecaedrum describi, docuit Euclides propos. 17. lib. 13) suos 20. angulos statuere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, quinos videlicet in singulis circulis, atque in eo situ, quo eadem 20. puncta notauimus.

SIT ergo in sphaera descriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos statuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, k, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta subtendens angulum pentagoni aequilateri & aequianguli opposito lateri aequidistat, vt in scholio propos. 8. lib. 13, demõstrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri

DE, in pentagono D E K O I; & K F, ipsi AE, in pentagono AEKPF; & FG, ipsi AB, in pentagono ABGLF; & sic de cæteris. Quia igitur recta AB, AE, rectis F G, F K, parallelæ
a 15. vndecimi. sunt; a erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG, GH, ductum, quod hæ rectæ rectis AB, BC, sint parallelæ. Igitur ex scholio propos. 16. lib 11. plana per FG, FK, & per F G, G H, ducta, inter se parallela sunt, cum eidē plano pētagoni A BCDE, sint parallela; atque adeo, ex eodem scholio, cum conueniant in recta FG, vnum planum efficient. Non aliter ostēdemus, planum quoque per FK, KI, & planum per K I, I H, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in sphæra b efficient duos circulos
b 1. 1. Theod. parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemque modo plana per pūcta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP, Eruntque tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia A BCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL;
c 4. pri. c quæ omnes æquales sunt, cum subtendāt angulos æquales in pentagonis æqualibus.



DEINDE quia ex scholio propos. 8. lib. 13. rectæ iunctæ N D, M B, lateri CH, parallelæ sunt in pentagonis C H N I D;
d9. vndecimi. B G M H C; d erunt quoque ipsæ iunctæ ND, MB, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqua-
e33. pri libus subtendant. e Igitur & iunctę NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ NO, CE, cum connectant duas NC, OE, æquales ac pa-
f15. vndecimi. rallelas, quod vtraque lateri DI, sit parallela. f Circulus igitur LMNOP, circulo ABCDE, paralelus est, cum ille ducatur per rectas NM, NO, hic vero per rectas B D, CE, qui-

bus

bus illa parallela sunt ostensa. Non secus ostendentur paralleli circuli Q R S T V, F G H I K. Omnes ergo quatuor circuli paralleli sunt.

RVRSVS quoniam iuncta recta EF, OV, cum ex scholio propos. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVPKO, aquidistent, a parallela sunt; nec non & inter se aquales, quod angulos aquales in pentagonis aqualibus subtendant, b erunt & recta iuncta EO, FV, parallela & aquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in vno plano est, c cum EF, OV, in eodem sint plano cum parallelis EO, FV. Est autem & in circulo, d propterea quod planum, in quo existit, in sphara circulum efficit. Igitur ex iis, qua ad propos. 31. lib. 3. demonstrauimus, cum in eo quadrilatero opposita latera aqualia sint, quadrilaterum rectangulum est EFVO; ac proinde cum omnia latera aqualia sint, subtendentia angulos aquales in pentagonis aqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum potest lateris FE, ex scholio propos. 47. lib. 1. hoc est, recta iuncta FG, quod aquales sint FG, FE, subtendentes angulos pentagonorum aqualium: ideoque qualium partium 1. statuetur quadratum recta F G, talium 2. erit quadratum recta F O, & ambo quadrata simul earundem partium 3. Quibus e cum aquale sit quadratum iuncta recta OG, qua diameter sphara est; (Nam cũ aquales sint iuncta FG, ON, subtendentes aquales angulos pentagonorum, & inter se parallela, quod duabus parallelis AB, ST, parallela sint, ex scholio propos. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter sphara.) erit quoque quadratum diametri sphara 3. qualium 1. est quadratum recta FG, hoc est, quadratum diametri sphara quadrati recta FG, triplum erit. f Est autem & quadratum lateris trianguli aquilateri triplum quadrati semidiametri, hoc est, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratũ diametri sphara ad quadratum recta FG, ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni; g atque adeo vt diameter sphara ad rectam F G, ita latus triãguli aquilateri ad latus hexagoni: Vt au-

Diam. sphæræ	Latus pentag.
Recta F G.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

a 9. vndecimi.
b 33. pri
c 7. vndecimi.
d 1. 1. Theod.
e 47. pri
f 12. tertijdec.
g 22. sex

tem

tem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quod FG, sit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in apposita formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propos. sit quoq; vt diameter sphæræ ad latus triãguli, hoc est, ad iunctã rectã AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis.

PRAETEREA quia ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt iuncta recta F G, subtendens angulum pentagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pentagoni in circulo ABCDE, ita latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE; erit quoque vt latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus triãguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt proxime demonstratum est. Igitur ex æquo erit,

Diam. sphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE,	Lat. decagoni.

vt diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cũ pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propos. sit quoque, vt diameter sphæræ ad EF, latus trianguli in circulo DEF, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus DEF, GHI, figuræ antecedentis propos. vtrique circulo ABCDE, QRSTV, huius figuræ æqualis. Quare circuli ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, sunt illi, quos in propos. antecedenti, & in hac descripsimus.

QVIBVS demonstratis, nullo negotio probabimus, solidam figuram AS, à nobis descriptam esse Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in sphæra descripto, cuius basis pentagonum ABCDE, omnes eius anguli solidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icosaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus DEF, figuræ antecedentis propos. æqualis est circulo ABCDE, figuræ huius propos. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 5.

MANIFESTVM quoque est, eosdem prorsus circulos sustinere & angulos solidos Icosaedri, & angulos solidos Dodecaedri.

SCHOLIVM.

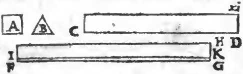
EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonstrauimus, facile etiam ostendemus, si omnia quinque corpora regularia in vna eademque sphæra describantur, maximum omnium esse Dodecaedrum: Deinde Icosaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro esse maius. Ex quo constabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora construxisse, cum post Tetraedrum statim octaedrum, non autem cubum, constituerit. Ita enim semper a minoribus ad maiora progressus est. Sed prius alia nonnulla demonstranda sunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula simul maiora, quam octo quadrata simul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis esse maiora. Sit enim rectangulum CE, cuius vnum latus CD, octuplum sit lateris quadrati A, & latus DE,

lateri eiusdem quadrati æquale: Eritque rectangulum CE,
a 1.*sex.* *octuplum quadrati A*,a *cum sit, vt CD, ad latus quadrati A, ita rectangulum CE, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum FH, cuius vnum latus FG, decuplũ sit lateris trianguli B, & latus GH, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius basem demissæ, hoc est, altitudini triãguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnũ latus est vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale*
b 1.*sex.* *ipsi GH, hoc est, altitudini trianguli B*,b *vigecuplũ est triãguli B; Ei autem triangulo rectangulo æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. rectangulum FH, quippe cum basis FG, dimidium sit basis illius trianguli; erit quoque rectangulũ FH, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur est, rectangulũ*
c 12. quartidecimi. *FH, maius esse rectangulo CE.* c *Quoniam latus trianguli B, hoc est, latus DE, potentia sesquitertium est eius perpendicularis, hoc est, lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quod FG, sit 10. & CD, 8. hoc est, FG, 5. & CD, 4. Erit maior proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Est enim maior proportio 25. ad 16. supernoncupartiens sextasdecimas, quam 4. ad 3.*
d 12.*sex* *sesquitertia, quod maior sit fractio* $\frac{9}{16}$. *quam* $\frac{1}{3}$. d *Fiat vt FG, ad CD, ita DE, ad HK, eritque maior quoque proportio*
e 10.*qu.* *DE, ad HK, quam ad GH;* e *ac proinde maior erit GH, quam HK. Ducta ergo KI, ipsi FG, parallela, erit vt IK, ipsi*
f 14.*vel* 16.*sex.* *FG, æqualis ad CD, ita DE, ad HK.* f *Igitur erit IH, rectangulum rectangulo CE, æquale: ideoque EH, maius, quam CE. Quod est propositum.*



I I.

OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descripta æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.

a QVONIAM duo quadrata ex diametro sphæra descripta superficiei cubi in ea sphæra descripti æqualia sunt: Duo vero eadem quadrata æqualia sunt octo quadratis ex semidiametro sphæra descriptis, quod quadratum diametri quadruplum sit quadrati semidiametri, ex scholio propos. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata semidiametri sphæra æqualia quoque esse superficiei cubi eiusdem sphæra. Quod est propositum. a 20. quartidecimi.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, erit perpendicularis è centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim octaedri, & cubi ducta.

NAM b quia latus octaedri maius est latere Icosaedri in eadem sphæra; erit vnum triangulum octaedri maius quoque vno triangulo Icosaedri. Quare si vtrumque solidũ ita intra sphæram constituantur, vt triãgulum vnius triangulo alterius sit parallelum, longius à centro aberit Icosaedri triangulum, quam triangulum Octaedri; cum vtrumque tribus angulis superficiem sphæra attingat: Ac proinde perpendicularis è centro sphæra ad basim Icosaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad basim Octaedri. Cum ergo perpẽdicularis octaedri æqualis sit perpendiculari cubi; c quod basis cubi, & basis octaedri eodem circulo circumscribantur, ideoque æqualiter à centro distent; erit quoque perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi maior. Quod est propositum. b 18. tertijdec. c 21. quartideci.

IIII.

SI Cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi maior est.

QVO-

QVONIAM viginti triangula aquilatera super semidiametro sphara maiora sunt octo quadratis ex eadem sphara semidiametro descriptis, vt theoremate 1. demonstrauimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri maiora viginti triangulis aquilateris super semidiametro sphara constructis, quod latus Icosaedri semidiametro sphara maius sit, ex coroll. 1. problematis 4. superioris; Igitur & viginti triangula Icosaedri multo maiora sunt octo quadratis ex sphara semidiametro descriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphara descripta, superficiei cubi aqualia sint, ex theoremate 2. paulo ante demonstrato; erit quoque Icosaedri superficies maior superficie cubi. Quod est propositum.

DE COMPARATIONE SOLIDItatum quinque corporum Regularium in eadem sphara descriptorum.

HIS pramissis, demonstremus iam, Dodecaedrum maius esse Icosaedro: Icosaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro, quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro maius est.

QVONIAM est, a vt cubi latus ad latus Icosaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum: b est autem latus cubi latere Icosaedri maius; maius quoque erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.

a 11. Quartidecimi. b 18. tertijdec.

I I.

ICOSAEDRVM cubo maius est.

QVONIAM perpendicularis ex centro sphara in vnam basim Icosaedri cadens, maior est perpendiculari ex eodem centro in vnam basim cubi demissa, vt in 3. theoremate

pra-

præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi maior quoque est; Erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basim Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri contentum, maius solido, quod sub perpendiculari ex eodē centro sphæræ in vnam basim cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cum ergo, vt in scholio propos. 20. lib. 14. demonstrauimus, illud solidum Icosaedro sit æquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icosaedrum, quam cubus. Quod est propositum.

III.

CVBVS Octaedro maior est.

QVONIAM est, [a] vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius. (Nam [b] cum latus cubi maius sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, maius semidiametro sphæræ; erit latus cubi multo maius semidiametro sphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum.

a 27. quartidecimi.
b 18. tertydec.

IIII.

OCTAEDRVM Tetraedro maius est.

QVONIAM basis octaedri minor est base Tetraedri, [c] quod basis Tetraedri ad basem octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basim octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæræ centro ad vnam basim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam supra theoremate 3. ostendimus, perpendicularem in Icosaedro maiorem esse perpendiculari in octaedro, & cubo. Est autem & superficies octaedri superficie Tetraedri maior, [d] cum illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpendiculari ex cētro sphæræ in vnam basim Octaedri cadente, & tertia parte superficiei octaedri, maius est solido cōtento sub perpēdiculari ex eodē centro sphæræ in vnā basim Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cum, ex scholio

c 14. quartidecimi.
d 14. quartidecimi.

propos.

propos. 20. lib. 14. illud solidum Octaedro sit æquale, hoc vero Tetraedro; erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.

a 22. quartidecimi. ALITER. Quoniam est,[a] vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrũ. Igitur ex æqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri; (Nam b quia quadratum lateris Tetraedri

b 18. tertijdeci. sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoque multo minorem tripla; c ac proinde tertia

c 10. qu. pars lateris Tetraedri minor erit lateri Octaedri.) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.

d 17. quartidecimi. ALITER. d Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet, vt rectangulum sub linea potente $\frac{2}{6}\ \frac{7}{4}$. quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quod eius latera minora sint sphæræ diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.

e 32. quartidecimi. ALITER. e Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri. (Nam f cubus ad octaedrũ

f 27. quartidecimi. est, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quam triplum semidiametri sphæræ, quod & tota diameter, quæ cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quam triplam.) Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod est propositum.

EODEM prorsus ordine se mutuo superant conuexa superficies eorundem corporum Regularium; hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cu-

bi:

bi: Cõuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

QVONIAM enim a est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus Icosaedri maius, b vt supra demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior. a 9. quartidecimi. b 18. tertijdec.

SVPERFICIEM vero Icosaedri miorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulo ante theoremate quarto ante comparationem soliditatum quinque corporum Regularium.

DEINDE c quoniam est superficies cubi ad octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus, cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoque superficies cubi superficie Octaedri maior. c 27. quartidecimi.

DENIQVE, d quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuum est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie. d 14. quartidecimi.

VIDES igitur superficies & soliditates corporum Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam superficiem, at eo minus latus. Nam e vt supra demõstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius vero superficies atque soliditas, vt hic demonstrauimus, omnium minima est: Item Dodecaedri latus omnium est minimum, eius vero conuexa superficies & soliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrũ in eadem sphæra descripta sint, latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atque ab Euclide descripta, se mutuo superant, f vt supra ostensum est, ita contrario ordine eorundem superficies conuexæ, atque soliditates se mutuo superant, vt hoc loco demonstrauimus. e 18. tertijdec. f 18. tertijdec.

CAETERVM prætereundum non est hoc loco id, quod à Pappo demonstratum est lib. 4. Mathematicarum collectionum; soliditates videlicet quinque corporum Regularium,

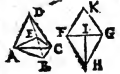
si Isoperimetra sint, atque idcirco, non in eadem sphara constructa, longe aliter se habere, quam a nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Ita vt Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius sit.

INVENTIO ANGVLI inclinationis duarum basium cuiuscunque solidi regularis, vnius ad alterã, ex Isidoro Hypsiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT pyramis ABCD, cuius latere BD, bifariam secto in E, ex angulis A, & C, lateri B D, oppositis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cum perpendiculares sint ad BD,



communem sectionem planorum ABD, CBD, in quibus existunt. (a Sunt enim in triangulis AEB, AED, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis AEC, basium ABD, CBD, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur FGH: triangulum æquilaterum super rectam FG, lateri pyramidis æqualem constrn-

a 8. pri.

ctum, atque idcirco triangulo cuicũque pyramidis propositæ, ipsi nimirum ABD, æquale, in quo ducta HI, perpendiculari ad FG, constituatur super FG, triangulum FGK, habens vtrumque latus FK, Gk, æquale perpendiculari HI, hoc est, vtrique perpendiculari AE, CE, cum perpendiculares HI, AE, CE, sint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum FKG, æqualem esse angulo inclinationis AEC, basium ABD, CBD. Cũ enim latera kF, kG, æqualia sint lateribus EA, EC; & basis FG, basi AC: [a] Aequales erunt anguli FkG, AEC. Dico insuper angulum inclinationis ACE, acutum esse. [b] Cum enim latus AD, vel illi æquale AC, sesquitertium sit potentia vtriusque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriusque rectę AE, CE: ideoque earundem partium 6. erunt ambo simul quadrata rectarum AE, CE. Quare cum in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus sit quadratis simul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in scholio propos. 13. lib. 2. demonstrauimus.

a 8. pri.

b 12. quartidecimi.

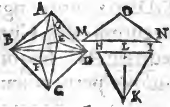
COROLLARIVM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sunt AE, CE, subtendanturque a lateribus pyramidis, quale fuit AC; a omnes erunt inter se æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & latera pyramidis eosdem subtendentia sint æqualia.

II.

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri basium, vnius ad alteram, reperire.

EXHIBEATVR octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE, triangulis ABE, ADE, commune, bifariamque sectum in G, rectæ ducatur BG, DG, quæ cum perpendiculares sint ad AE, communem sectionem planorũ ABE, A D E, in quibus existũt,[a] (quod in triangulis BGA, BGE, anguli ad G, æquales sint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis basium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11.



a 26. pri.

Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum super rectam HI, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propositi, triangulo

ſcilicet ABE,æquale,in quo ducta KL, perpendiculari ad H I, conſtituatur ſuper recta MN,quæ æqualis ſit diametro octaedri BD, hoc eſt,diametro quadrati ABCD,ex AB,latere octaedri deſcripti,triangulum O M N, habens vtrumque latus MO, NO, perpendiculari kL,ęquale,hoc eſt,vtrique perpendiculari B G, D G, cum perpendiculares KL,BG,DG,in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum MON,æqualem eſſe angulo inclinationis BGD, baſium ABE, ADE. Cum.n. latera OM,ON,æqualia ſint lateribus GB,GD;& baſis M N, baſi B D; [a] Aequales erunt anguli M O N, BGD. Dico præterea,angulum inclinationis BGD, eſſe obtuſum. [b] Cũ enim diameter octaedri BD, dupla ſit potẽtia lateris AB: [c] latus vero AB, potentia ſeſquitertium rectæ B G: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD,talium 4. erit quadratum lateris AB,earundemque 3.quadratum rectæ BG; ideoque ambo ſimul quadrata rectarũ BG, DG, talium partium 6.erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, maius eſt quadratis ſimul laterum GB,GD;Ac propterea angulus BGD, obtuſus erit, vt in ſcholio propoſ.12.lib.2.oſtendimus.

a 8. pri.

b 14. tertij dec.

c 12. quarti dec.

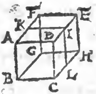
COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpẽdicularibus ab angulis triãgulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, DG, subtendanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi
a 28 pri. est BD; a omnes inter se æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes sint æquales.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT cubus ABCDEFGH, in quo secetur latus DE, bifariam in I, necnon & latera illi opposita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur IK, IL; b quæ cum æ-



b 33. pri. quales, ac parallelæ sint lateribus EF, EH, (quod & kF, IE, inter se, necnon & IE, LH, inter se æquales existant, & pa-
c 29. pri. rallelæ) ideoque c angulos rectos ad latus DE, efficiant, continebunt kIL, angulum inclinationis basium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ Ik, IL, parallelę existẽtes rectis EF, EH, & non
d 10. vndec. in eodem cum illis plano, d angulum kIL, æqualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi Quare vt angulo inclinationis basium cub æqualis in aliquo plano exhibeatur, consti tuendus erit angulus rectus. Hic enim, v

mo do

modo demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.

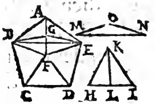
COROLLARIVM I.

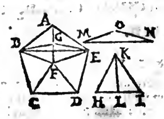
QVOCIRCA, cum eodem argumẽto demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum: perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IIII.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, vnius ad alteram, inuenire.

ESTO pyramis ABCDEF, vna ex 12. pyramidibus Icosaedri, cuius basis pentanũ ABCDE, ex quinque Icosaedri lateribus compositũ, vertex autem F. Diuiso itaq; latere AF, bifariam in G, ducantur ex triãgulorum ABF, AEF, latus AF, commune habentiũ, angulis B, & E, lateri AF, oppositis rectæ BG, EG, quę cum ex demonstratis in probl. 2. huius scholij, perpendiculares sint ad AF, cõmunem sectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendent BGE, angulum inclinationis basium ABF, AEF, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Acci-





piatur triangulum æquilaterum H I K, super rectam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatum, hoc est, cuius triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, construatur super recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum OMN, habens vtrumque latus M O, N O, perpendiculari K L, æquale, hoc est, vtrique perpẽdiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, B G, EG, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basium ABF, AEF, æqualem esse. Cum enim latera O M, O N, æqualia sint lateri-
a 8. pri. bus GB, GE, & basis MN, basi BE; [a] Aequales erunt anguli M O N, B G E. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum. Cum enim B G, angulum rectum
b 19. pri. faciat A G B; [b] erit recta A B, maior quam recta BG; ad eundemque modum AE, maior erit quam E G. Quare rectæ A B, A E, maiores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, G E, positæ sint æquales. Si

itaque recta BE, super rectam sibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON, ita vt rectæ AB, AE, rectas OM, ON, prorsus includant.[a] Angulus ergo O, maior erit angulo BAE: At hic obtusus est. (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ a nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper vnius recti partem quintã. Obtusus ergo erit, cum recto sit maior) Multo igitur magis obtusus erit angulus MON, hoc est, sibi æqualis BGE. a 21. pri.

COROLLARIVM.

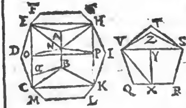
NON obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationũ contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, EG, subtendanturque a rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BE: b omnes inter se erunt æquales, quod & illę omnes perpendiculares, quę ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, c æquales erunt. b 8. pri. c 4. pri.

V.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

CVM per ea, quæ ostendimus in propos. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angu

los quatuor basium Dodecaedri ad vnum latus coeuntium; sint huiusmodi pentagona ABCDE,EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus A B, conuenientia,duo quidem ABCDE, AHIKB, secundũ idem latus commune



AB; alia autem duo AEFGH, BCMLk, secundum angulos EAH,CBk.His porro pentagonis inscriptum sit quadratũ cubi ECkH, cuius quatuor latera subtendant quatuor angulos pentagonorum D,B,I, A. Diuiso autem latere AB,bifariam in N,ducantur ex N, in planis pẽtagonorum ABCDE, ABKIH,ad AB,perpendiculares NO, NP, secantes latera EC,HK,in O,& P, ad angulos quoque rectos,cum rectæ EC, HK, ipsi AB,sint parallelæ, ex scholio propos. 8. lib. 13.Comprehendunt igitur NO,NP,angulum ONP, inclinationis basium ABCDE, ABKIH.Cui æqualem in quouis plano hac arte construemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri A B, æqualem constituatur pentagonum æquilaterum & æquiãgulum QRSTV, hoc est, cuius pentagono Dodecaedri,nimirum ipsi ABCDE, æquale, cu-

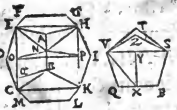
ius angulo T, recta ſubtendatur VS,[a] æqualis exiſtens rectæ EC, cum & latera TV, TS, lateribus DC, DE, ęqualia ſint, anguloſque contineant ęquales. Diuiſa deinde recta QR, biſariam in X, ducatur a puncto X, ad QR, perpendicularis XY; proptereaque perpendicularis ad VS, cum VS, ſit parallela ipſi QR, ex ſchol. propoſ. 8. lib. 13. Ac poſtremo ſuper recta VS, triangulum fabricetur VZS, habens vtrumque latus ZV, ZS, perpendiculari XY, ęquale. Dico angulum VZS, ęqualem eſſe angulo inclinationis ONP. Ductis enim rectis NE, NH, VX; cum latera EA, AN, ęqualia ſint lateribus HA, AN: Item lateribus VQ, QX, anguloſque comprehendant æquales;[b] Aequales erunt & baſes NE, NH, VX, & anguli ANE, ANH, QXV; ideoque & reſidui ex rectis, anguli videlicet ENO, HNP, VXY, æquales erunt. Quoniam igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales ſunt angulis HNP, HPN, trianguli HNP; nec non & angulis VXY, VYX, trianguli VXY; (ſunt.n. EON, HPN, VYX, oſtēſi recti.) Et latus NE, lateribus NH, VX, æquale demonſtratū;[c] Aequalia erunt reliqua latera NO, OE, reliquis lateribus NP

[a] 4. pri.

[b] 4. pri.

[c] 26 pri.

PH; Item lateribus XY, YV. Quare rectæ ZV, ZS, æquales existentes ipsi XY, rectis NO, NP, æquales erunt. Iam vero, quia
a 33. pri OE, PH, æquales sunt, ac parallelæ; [a] erit quoque recta coniuncta OP, æqualis & parallela ipsi EH, ideoque æqualis ipsi EC, hoc est, rectæ VS. Quam ob rem, cum latera ZV, ZS, lateribus NO, NP, æqualia
b 8. pri. sint; basis item VS, basi OP; [b] æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta Bα, ipsi NO, parallela; cum sit quoque NB, ipsi Oα, parallela, ex scholio propos. 8. lib. 13. Parallelogrammũ erit NOαB, [c] ideoque
c 34. pri recta Bα, ipsi NO, æqualis. Quia vero



BC, latus pentagoni oppositum angulo
d 29. pri CαB, qui rectus est, ([d] æqualis nimirum interno CON,) maius est latere Bα, hoc est, recta NO, vel vtraq; ZV, ZS, quæ ipsi NO, ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ TV, TS, maiores duabus rectis ZV, ZS. Cadit igitur punctum Z, intra triangulum TVS, ita vt rectæ TV, TS, rectas ZV, ZS, includãt

om-

omnino; Atque proinde angulus VZS, ideoque illi æqualis ONP, maior eſt angulo pentagoni T: Hic vero, cum ſit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione baſium Icoſaedri ageremus, demonſtratus eſt maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtuſus.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes baſium Dodecaedri æquales eſſe inter ſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro deſcripti ductis: quales ſunt NO, NP, ſubtendanturque a rectis, quæ cubi inſcripti lateribus ſunt æquales, vel certe, quæ rectis ſubtendentibus angulos pentagonorum æquales ſunt, cuiuſmodi eſt recta OP, lateri cubi inſcripti EH, quod angulum pentagoni EAH, ſubtendit, æqualis: a Erunt omnes inter ſe æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint: nec non & rectæ illæ omnes, quę eoſdem ſubtendunt, latera videlicet cubi, inter ſe etiam ſint æquales. a 8. pri.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

REGESTVM

a b c d e f g h i k l m n o p q r ſ t u x y z

aa bb cc dd ee ff gg hh ii kk ll mm nn oo pp qq rr ſs tt uu xx yy zz

aaa bbb ccc ddd eee fff ggg hhh iii kkk lll mmm

Omnia ſunt integra folia.

ROMÆ,
Apud Aloyſium Zannettum. MDCIII.

SVPERIORVM PERMISSV.

Pagina 432. pro figura ibi posita reponatur hæc.

